



Existencia de una estructura óptima de capital

**Tesis presentada en satisfacción parcial de los
requerimientos para obtener el grado de Maestro en
Finanzas
por:**

Alfonso Honorio Bedía Sánchez

Omar Renzo Piminchumo Mariños

Programa de la Maestría en Finanzas

Lima, 20 de abril de 2018

Esta tesis

Existencia de una estructura óptima de capital

ha sido aprobada.

.....
Alfredo Mendiola C. (Jurado)

.....
Luis Piazzon G. (Jurado)

.....
Luis Chávez-Bedoya M. (Asesor)

Universidad ESAN

2018

A mis padres, hermana, esposa e hija por su apoyo.

Omar Piminchumo Mariños

A mis padres, Alfonso y Margarita, y a todas aquellas personas
que hicieron posible esto por su amor, cariño y apoyo incondicional.

Alfonso Bedía Sánchez

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I). INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO II). METODOLOGÍA Y DESARROLLO.....	4
2.1. Conceptos fundamentales	4
2.2. Aplicación de los criterios de las derivadas al R_{WACC}	9
2.2.1. <i>Propiedades de las derivadas</i>	9
2.2.2. <i>Aplicación del criterio de la primera derivada</i>	10
2.2.3. <i>Aplicación del criterio de la segunda derivada</i>	12
2.3. Existencia de la estructura óptima de capital	13
2.3.1. <i>Caso I</i>	14
2.3.2. <i>Caso II</i>	16
2.3.3. <i>Caso III</i>	21
2.3.4. <i>Caso IV</i>	30
CAPÍTULO III). REVISIÓN DEL MODELO DE PABLO FERNÁNDEZ	36
3.1. Revisión del estudio de Pablo Fernández.....	37
3.2. Comparación de resultados.....	38
3.3. Ventajas y Desventajas del modelo	47
CAPÍTULO IV). CONCLUSIONES	48
ANEXOS	
I. Desarrollo de la primera derivada del R_{WACC}	51
II. Desarrollo de la segunda derivada del R_{WACC}	53
III. Ecuación resultante (16) de la ecuación diferencial ordinaria (15).	54
IV. Reemplazo de R_S y R_B (ecuación 17) en la ecuación (9) del R'_{WACC}	55
V. Ecuación resultante (18) de la ecuación diferencial ordinaria (15).	56
VI. Reemplazo de R_S y R_B (ecuación 18) en la ecuación (9) del R'_{WACC}	57
VII. Tabla 27.1 estructura óptima. Tomada del documento de Pablo Fernández.	59
BIBLIOGRAFÍA	60

DEFINICIÓN DE VARIABLES

S	: Valor de mercado del patrimonio
B	: Valor de mercado de la deuda
R_S	: Rendimiento esperado del capital
R_B	: Rendimiento de la deuda (Costo de la deuda)
T_X	: Tasa del impuesto a la renta
R_{WACC}	: Costo promedio ponderado capital
R_V	: Rendimiento (Costo) de la deuda con apalancamiento cero
\emptyset	: Apalancamiento (B/S)
R_0	: Costo de capital de una empresa no apalancada

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1. Primera y segunda derivada de R_S y R_B	14
Tabla 2.2. Primera y segunda derivada de R_S y R_B	16
Tabla 2.3. Primera y segunda derivada de R_S cuando $R_B = \alpha(1 + \emptyset)^\delta$	22
Tabla 2.4. Primera y segunda derivada de R_S cuando $R_B = \alpha e^{\beta \emptyset}$	30
Tabla 3.1. R_S cuando $R_B = \alpha(1 + \emptyset)^\delta$	39
Tabla 3.2. Cálculos de la estructura óptima de capital utilizando los datos de la Tabla 27.1 del documento de Pablo Fernández.	42
Tabla 3.3. Cálculos de la estructura óptima de capital utilizando los datos de la Tabla 27.1 del documento de Pablo Fernández y un delta (δ) que asemeja los R_B de Fernández y el caso III	44

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Evolución de R_S (Tabla 2.2), R_B (17) y R_{WACC} (4) para diferentes valores de apalancamiento.....	19
Figura2. Evolución de R_S (Tabla 2.2), R_B (18) y R_{WACC} (4) para diferentes valores de apalancamiento.....	20
Figura 3: Gráficos de $y = (1 + \emptyset)^\delta \times (1 + \emptyset \times \delta)$ para diferentes valores de δ	23
Figura 4: Gráfica de R_{WACC} y su punto mínimo.....	26
Figura 5: Apalancamiento Óptimo (\emptyset) en función de δ , según ecuación (25).....	29
Figura 6: El eje "y" = $e^{\beta\emptyset} (1 + \emptyset \times \beta + \emptyset^2 \times \beta)$ para diferentes valores de β	31
Figura 7: Gráfica de R_{WACC} y su punto mínimo.....	32
Figura 8: Apalancamiento Óptimo (\emptyset^*) en función de β , según ecuación (26).	35
Figura 9: Resultado Modelo Pablo Fernández.	40
Figura 10: Sensibilización del R_{WACC} respecto a delta (δ) y al nivel de apalancamiento (\emptyset)	45
Figura 11: Sensibilización del R_{WACC} mínimo respecto a delta (δ).....	46

ALFONSO BEDÍA SÁNCHEZ

Contador Público Colegiado de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Experiencia y conocimientos en temas contables, tributarios y financieros. Conocimiento de Inglés. Aspiración de desarrollo profesional en gerencia de finanzas.

FORMACIÓN

2015 - 2018 **Escuela de Administración de Negocios para Graduados – ESAN**

Maestría en Finanzas

2005 - 2010 **Universidad Nacional Mayor de San Marcos – UNMSM**

Titulado de Contabilidad

EXPERIENCIA

2013 – 2018 **A.W. FABER-CASTELL PERUANA S.A.** Empresa con más de 50 años en el mercado peruano, líder en su rubro con ingresos por ventas mayores a los S/ 240 millones.

Jun. 2013- Actualidad Analista de Contabilidad. Responsable de la supervisión y cumplimiento de las obligaciones tributarias, elaboración de los Estados Financieros mensuales y anuales, y absolución de consultas tributarias.
Atención de auditorías externas tanto financiera como tributaria.

2009 – 2013 **ASESORÍA JURÍDICA, CONTABLE Y FINANCIERA S.A.C.** Estudio Contable a cargo de prestar servicios contables, jurídicos y financieros en las empresas más importantes del emporio de “Gamarra”.

Set. 2009- Abr. 2013 Asistente de Contabilidad. Responsable de las labores contables de una cartera de clientes del estudio. Elaboración de Estados Financieros anuales, absolución de consultas tributarias, costeo de importaciones, control de leasings y letras en descuento y cobranza.

SEMINARIOS

Diplomado en Gestión Tributaria (2012 - ESAN).

OMAR PIMINCHUMO MARIÑOS

Ingeniero Mecánico con más de 7 años de experiencia en industrias de consumo masivo y petróleo. Gracias a mis empleos he tenido la oportunidad de aprender y entrenar en diversos lugares alrededor del mundo, incrementando mis habilidades, aprendiendo que la diversidad es la clave para el éxito y que las buenas prácticas de diferentes lugares pueden ser implementadas exitosamente en cualquier empresa para obtener excelentes resultados.

FORMACIÓN

2015 - 2018 **Escuela de Administración de Negocios para Graduados – ESAN**

Maestría en Finanzas

2004 - 2009 **Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP**

Titulado en Ingeniería Mecánica

EXPERIENCIA

2017–2017 **PRODUCTOS TISSUE DEL PERÚ.** Una de las empresas de cuidado personal más grandes del mundo.

Oct. 2017- Jefe de Mantenimiento. A cargo del departamento de mantenimiento de la
Dic. 2017 planta de conversión. Aplicación de técnicas y estrategias de mantenimiento como correctivo, preventivo, predictivo, TPM y RCM. Responsable de la gestión de 25 empleados y un presupuesto de 1.2 M USD / año.

2017–2017 **COMERCIAL DRILLING SERVICES, MINERIA.** Empresa de manufactura y servicios mineros.

May. 2017- Jefe de Proyectos. A cargo de la cartera de proyectos de la empresa.
Sep. 2017 Un total de 9 proyectos con un valor global de 5M USD, que incluyen el desarrollo de nuevos productos para la operación minera y una nueva planta de fabricación de 10,000 m².

2012–2016 **SCHLUMBERGER PETROLEO & GAS.** Empresa de servicios petroleros más grande del mundo.

May. 2012- A cargo de la planta de producción de Bombas eléctrico sumergible (BES).
Nov. 2016 Responsable de la gestión de 20 empleados y equivalentes a 1,8 M USD en activos fijos, 4,5 M USD / mes en Inventario, 1 M USD / año en presupuesto y 7,2 M USD / año en los costos de producción. Líder del equipo de proyectos de mejora continua, implementando Lean Manufacturing, Teoría de Restricciones y Planificación de Inventario y Demanda con alto impacto en el rendimiento del negocio: Aumento del 75% en la producción, 4% en el IBT, reducción de 28% en inventario, 15% en costos y aseguramiento del 100% de mercado para nuestros productos con la misma capacidad de la planta. Beneficio para la empresa: \$2.2 millones anuales.

SEMINARIOS

Diplomado en Dirección de Proyectos (2016/ 2017 - PUCP).

Programa de Especialización en Business Analytics & Big Data (2016/ 2017 - UNI).

Programa de Especialización en Gerencia de Producción (2016 - UNI).

Marketing Summit 2016: Trends & Challenges in the Digital Era (2016 - Universidad del Pacífico).

X Congreso Internacional de Dirección de Proyectos – Tour Cono Sur 2016 (2016 - PMI®).

RESUMEN

La estructura de capital de una empresa es la combinación de deuda y patrimonio con la que se planea financiar las inversiones que generarán los ingresos futuros (flujos de caja). Tanto la deuda como el patrimonio tienen rendimientos exigidos (R_B y R_S respectivamente), los cuales cuando se ponderan con su respectiva participación se obtiene el Costo Promedio Ponderado de Capital (R_{WACC}), que es el costo global en que la empresa incurre por los fondos recibidos. De lo anterior, lo más conveniente para una compañía es disminuir este costo lo máximo posible, ya que esto a su vez genera un mayor valor de la empresa.

Modigliani y Miller propusieron que, en un mundo con impuestos, mientras más apalancamiento tenga la empresa, menor el R_{WACC} , y por ende mayor el valor de ésta. El problema con esta proposición, es que implica que la empresa puede apalancarse sin límite y seguir incrementando su valor indefinidamente sólo adquiriendo más deuda con respecto al capital, lo cual no conjuga bien con la realidad. Con el paso del tiempo, esta teoría ha sido la base para otras que proponen que la empresa no puede endeudarse indefinidamente, sino que existe un punto de inflexión a partir del cual aparecen costos asociados a la excesiva deuda (quiebra, agencia, etc.) de la empresa que generan que el valor de la misma deje de aumentar y, por el contrario, comience a disminuir. Dos de estas teorías son la del Trade-Off (Kraus y Litzenberger, 1973) y el Pecking Order (Myers y Majluf, 1984). Sin embargo, aunque estas teorías tienen cierta lógica cuando se las compara con la realidad, aún queda pendiente determinar cuáles serían las expresiones matemáticas de R_S y R_B que permitan calcular este punto de inflexión en la estructura de capital. Este punto de inflexión es la estructura óptima de capital.

En ese sentido, el presente trabajo busca encontrar y brindar un modelo matemático que permita soportar analíticamente el concepto del punto de inflexión y su cálculo, basándose en la premisa de que los costos de quiebra, agencia, etc., asociados al aumento de la deuda, se reflejan en la tasa R_B . En esa dirección, la presente tesis inicia definiendo

el Costo Promedio Ponderado de Capital (R_{WACC}) en función del nivel de apalancamiento, el cual se convierte en la variable a analizar ($\emptyset=B/S$). Luego, se hace uso del cálculo diferencial para establecer que toda función que tenga un mínimo debe cumplir con los criterios de la primera y segunda derivada.

Es así, que a lo largo del trabajo se presentan cuatro casos que buscan encontrar la combinación de expresiones para R_S y R_B que al utilizarse en R_{WACC} , permitan el cálculo analítico de la estructura óptima de capital. En los primeros dos casos se comienza con el análisis matemático del cumplimiento de los criterios de la primera y segunda derivada para tratar de obtener la expresión de R_B . Mientras que en los casos tres y cuatro, primero se proponen las expresiones de R_S y R_B , y luego se verifica si dichas expresiones cumplen los criterios de la primera y segunda derivada.

Adicionalmente, se presenta un ejercicio comparativo utilizando un estudio previo de estructura óptima de capital¹, con el fin de comparar resultados y verificar si el modelo analítico desarrollado en el presente trabajo brinda resultados congruentes con los desarrollos en dicho estudio.

Por último, se ha logrado determinar las expresiones matemáticas de R_S , y sobretodo de R_B , que permiten que exista un costo promedio ponderado de capital (R_{WACC}) mínimo, y de esta forma que también exista una estructura óptima de capital. Esto contribuye a reforzar de forma más analítica y matemática la Teoría del Trade-Off (TOT).

¹ Fernandez Pablo (2002). Optimal Capital Structure: Problems with the Harvard and Damodaran approaches. Research Paper N°454.

CAPÍTULO I). INTRODUCCIÓN

La gestión financiera de las empresas tiene como objetivo crear valor y a su vez maximizar el retorno para los accionistas. En esta línea se han desarrollado muchas metodologías que pretenden servir de modelos de valorización de empresas, las cuales tienen dos factores en común: El flujo proyectado y la tasa a la que se va a descontar dicho flujo. A su vez, se puede considerar en el modelo características de perpetuidad (lo que simplifica los cálculos) o flujos finitos. Si se quiere hacer más complejo el modelo se pueden agregar los efectos del costo/probabilidades de quiebra, e incluir criterios probabilísticos a los flujos de efectivo y tasas de descuento con el fin de evaluar la sensibilidad de los resultados a los riesgos existentes.

Se pueden mencionar 3 metodologías de valorización de empresas a través de flujos descontados: Costo Promedio Ponderado de Capital (WACC), Valor Presente Ajustado (APV) y Flujo a Capital (FTE). Cada una presenta diferentes criterios de aplicación y pueden utilizarse según circunstancias específicas, además cada una presenta diversas formulaciones y procedimientos, pero las tres presentan en común el requerimiento de conocer las tasas R_B (Costo de la Deuda) o R_S (Costo del Capital Accionario).²

Por otro lado, de los principios de Modigliani y Miller se establece que el valor de la empresa aumenta conforme se incrementa el nivel de apalancamiento de la misma. Es decir, según el modelo matemático propuesto, el costo de capital (en este caso el WACC) puede bajar indefinidamente sin importar el nivel de deuda de la empresa. El argumento anterior no va muy en congruencia con la realidad. De hecho, conforme aumenta el nivel de endeudamiento, los flujos de deuda se vuelven más riesgosos para los bonistas, por lo que estos exigirán una tasa más alta debido al riesgo implícito de no poder cobrar el préstamo completo en caso de insolvencia de la empresa. A su vez, al aumentar el costo de financiamiento y el nivel de deuda, la tasa exigida por el accionista para su inversión también aumenta.

² La palabra “rendimiento” se asocia al interés de mercado que ganan los valores (acciones, bonos, etc.). Mientras que cuando se habla de costo, se refiere a las tasas que las empresas deben pagar a los acreedores por los fondos prestados.

Este efecto, en el que tanto los bonistas como accionistas perciben una mayor probabilidad de impago de sus aportes a partir de un cierto nivel de deuda, hace que estos aumenten sus tasas (costos), ya que consideran más probable que la empresa entre en situación de quiebra y no puedan recuperar su inversión. Este efecto, es conocido como “Costos de Quiebra”, y es uno de los factores que impiden que las empresas se endeuden sin control. Los efectos de estos costos de quiebra provocan una inflexión en el Costo Promedio Ponderado de Capital (WACC) de la empresa, es decir, existe un punto donde éste es mínimo y donde el máximo valor de la empresa puede lograrse. Es decir, existe una estructura óptima de capital.

En la actualidad se cuenta con estudios y teorías relacionadas a la existencia de la estructura óptima de capital con base a la aplicación de ciertas condiciones; sin embargo, no existe ninguna formulación matemática que permita demostrar estas conclusiones.

Un ejemplo de estos estudios es el documento “Optimal Capital Structure: Problems with the Harvard and Damodaran approaches” de Pablo Fernández (2002)³, en el cual se analiza un caso de estructura óptima de capital presentado en una nota técnica de la Harvard Business School. En este estudio, lo que más resalta a nuestro interés son los valores de R_B y R_S utilizados, los cuales son números que no siguen ninguna relación matemática o expresión financiera conocida, y por ende no se puede justificar el por qué se pusieron esos números y no otros.

En ese sentido, el presente trabajo se enfocará en buscar y demostrar si existen, y cuáles serían, las expresiones matemáticas para R_S , y sobre todo para R_B , que permitan concluir matemáticamente si existe o no una estructura óptima de capital, y cuáles serían las condiciones de su existencia. Por otro lado, si se logra demostrar que no existe una estructura óptima de capital para los supuestos considerados, este resultado soportaría la teoría del Market Timing, la cual establece que no existe una estructura óptima de capital, sino que ésta es producto de hechos y decisiones históricas de las empresas.

³ Fernandez Pablo (2002). Optimal Capital Structure: Problems with the Harvard and Damodaran approaches. Research Paper N°454.

Es importante mencionar que el trabajo presenta limitaciones respecto a la estimación del costo de la deuda (R_B), ya que es muy complicado determinarlo por la gran cantidad de factores exógenos y endógenos que generan una alta dispersión en las tasas de interés de las diferentes entidades financieras. Determinar cómo las entidades financieras fijan el costo de la deuda (R_B), es ingresar a un campo en el cual se toman en consideración algunos o todos de los siguientes factores:

- Costo del fondeo de la entidad financiera.
- Capacidad de pago de la entidad prestataria (riesgo de crédito).
- Información de riesgos.
- Escala (monto) del crédito.
- Garantías.
- Contexto del país (económico, político, social, etc.)
- Contexto mundial (económico, político, social, etc.)

Ante este panorama, resultaría de gran ayuda que el sistema financiero peruano se desarrolle y proporcione información fidedigna y oportuna acerca del comportamiento del mercado ya que es de mucha utilidad en la toma de decisiones, respecto al financiamiento, actuar previniendo situaciones y no aguardar a la llamada del banco para conocer que una empresa no es sujeto calificado de crédito, y por ende, tener un mayor costo de la deuda.

Finalmente, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo principal encontrar posibles expresiones matemáticas para el costo del capital accionarios (R_S) y costo de la deuda (R_B) que permitan verificar analíticamente la existencia (o inexistencia) de la estructura óptima de capital utilizando el modelo del WACC, y teniendo como base las teorías de Modigliani y Miller y del Trade-Off (con las condiciones que éstas implican). En caso que se pueda determinar la estructura óptima de capital, ésta debe lograrse en función de otras variables, sin que su valor de ninguna sea asumido arbitrariamente, lo que es lo mismo, que todos tengan sustentos de su existencia.

Los objetivos específicos de la presente tesis serán:

- a) Determinar expresiones matemáticas para R_S y R_B que permitan la existencia de una estructura óptima de capital.
- b) Determinar una formulación de R_B que debe aumentar con el nivel de apalancamiento, reflejando de esta forma el impacto de los costos de quiebra. Asimismo, la expresión de R_B debe tener un valor mayor a cero cuando no exista deuda (apalancamiento cero).
- c) Las expresiones que se elijan no deben permitir que el apalancamiento óptimo se encuentre limitado. Esto debido a que en la realidad, el nivel de apalancamiento es muy variado dependiente de las empresas, industrias y mercados donde funcionan.

CAPÍTULO II). METODOLOGÍA Y DESARROLLO

En esta sección se presentarán algunos conceptos fundamentales para la mejor comprensión de la tesis. Además, se expondrán los desarrollos matemáticos realizados.

2.1. Conceptos fundamentales

En esta sección se presentarán las definiciones que serán de utilidad para el correcto entendimiento del presente trabajo:

1. Mercado Eficiente⁴

Un mercado es eficiente cuando los precios rápidamente incorporan cualquier nueva información, por ende, será difícil obtener rendimientos superiores consistentes ya que un mercado eficiente es ineludiblemente un mercado competitivo. Los economistas definen tres niveles de eficiencia del mercado, que se distinguen por el grado de información reflejado en los precios de los valores: débil, semifuerte y fuerte.

⁴ Basado en Brealey, Myers, Allen en “Principios de Finanzas Corporativas 9º Edición”.

- Débil, los precios reflejan la información contenida en el registro de los precios pasados. Los precios siguen una ruta aleatoria.
- Semifuerte, los precios no sólo reflejan los pasados, sino que se ajustará con toda la información que se publique en forma posterior.
- Fuerte, los precios reflejan toda la información que se puede adquirir mediante un cuidadoso análisis de la compañía y de la economía.

2. Teoría de Modigliani y Miller⁵

En cuanto al valor de una empresa, Modigliani y Miller en la Proposición I (mundo sin impuestos) establecen que el valor no depende de su estructura de capital, es decir que sin importar el nivel de apalancamiento el valor de la empresa será el mismo. En la Proposición I (mundo con impuestos), señalan que el valor de la empresa aumenta con el apalancamiento debido al efecto del ahorro fiscal que producen los intereses. El supuesto más importante planteado por Modigliani y Miller es que no existen los costos de quiebra, es decir que una empresa puede apalancarse a cualquier nivel sin que haya riesgo de quebrar.

3. Teoría del Trade-Off (TOT)⁶

A partir de los aportes de Modigliani y Miller, se incorporan diversas variables para dotar de más realidad las conclusiones obtenidas por ellos. La teoría del Trade-Off se centra en el estudio de las variables que, al aumentar el endeudamiento a partir de un cierto nivel, producen un incremento de costos en la empresa que afectan negativamente su valor. Es decir, el endeudamiento aporta valor pero hasta un determinado nivel, en el que una serie de variables afectadas por los mercados: costos de insolvencia, fiscalidad, garantías y avales, imagen de la empresa, etc., hacen que el valor de la empresa disminuya si aumenta el

⁵ Basado en Ross, Westerfield, Jaffe en “Finanzas Corporativas 9ª Edición” (2012).

⁶ Basado en Amat, O. y Puig, X. en “Marco General de las Finanzas Corporativas. Revista de Contabilidad y Dirección, 15 pp. 11-40” (2012).

Basado también en Ju Nengjiu, Parrino Robert, Potesman Allen y Weisbach Michael en “Horses and rabbits? Trade-Off Theory and Optimal Capital Structure. Journal of financial and quantitative analysis” Vol. 40, No 2 (2005).

endeudamiento. Estos costos suelen conocerse también como costos de quiebra, es decir, que el aumento de la deuda en una empresa luego de cierto punto, aumenta el riesgo de insolvencia e impagos en mayor proporción que los beneficios fiscales generados por la deuda.

4. Teoría del Pecking Order (POT)⁷

La teoría del Pecking Order indica que cuando el flujo de caja generado por una empresa es inadecuado para los compromisos de inversión y de dividendos, la empresa emite deuda. Nunca se emite capital excepto cuando la empresa sólo puede emitir bonos basura o los costos de las dificultades financieras son altas.

La teoría del Pecking Order analiza cómo la información asimétrica afecta las decisiones de inversión y financiamiento, y este análisis tiene dos resultados principales:

- Si los costos de las dificultades financieras son ignorados, la empresa financiará sus inversiones emitiendo los valores más seguros que puedan. “Seguros” significa no afectados por la revelación de la información privilegiada de los administradores.
- Si los costos de las dificultades financieras son serios, la empresa financiará sus inversiones emitiendo capital o pagando deuda. Se podría renunciar a la emisión si la información de los administradores es suficientemente favorable y el precio de emisión demasiado bajo. En ese caso el ratio de deuda permanecerá alto o las inversiones serán limitadas. Sin embargo, los administradores menos optimistas emitirán capital.

⁷ Basado en Lakshmi Shyan-Sunder y Stewart C. Myers en “Testing Static Trade-Off against Pecking Order Models of Capital Structure - Working Paper No. 3677” (1994).

5. Teoría del Market Timing (MTT)⁸

Básicamente establece que no hay un punto óptimo en el cual se logre el costo de capital mínimo, sino que el resultado del endeudamiento de la empresa es consecuencia de un conjunto de hechos y decisiones históricas. No existe un valor de apalancamiento objetivo, sino que diversos factores internos y de mercado motivaron a los gerentes a lo largo del tiempo para tomar decisiones financieras que permitieron lograr el nivel de deuda que presentan las empresas.

6. Tasa de descuento⁹

La tasa de descuento de un proyecto riesgoso es el rendimiento que se puede esperar ganar sobre un activo financiero de riesgo comparable. Se le denomina también costo de oportunidad porque la inversión corporativa en el proyecto les quita a los accionistas la oportunidad de invertir el dividendo en un activo financiero.

7. Costo de quiebra¹⁰

La posibilidad de una quiebra tiene efectos negativos sobre el valor de la empresa, sin embargo, no es el riesgo de quiebra en sí mismo lo que disminuye el valor, sino los costos asociados con la quiebra los que producen ese efecto.

Existen costos de quiebra directos e indirectos. Se consideran costos directos: los honorarios legales, administrativos, contables, de peritos, entre otros. Dentro de los costos indirectos tenemos: la obstaculización de realizar operaciones con clientes y proveedores, es decir el efecto que se produce producto del riesgo como recortes en las líneas de pago, suspensión en el suministro de insumos, menores

⁸ Basado en Malcolm Baker y Jeffrey Wurgler en "Market timing and capital structure – The Journal of Finance Vol. LVII, No 1" (2002).

⁹ Basado en Ross, Westerfield, Jaffe en "Finanzas Corporativas 9ª Edición" (2012).

¹⁰ Basado en Cornejo Díaz René Helbert (2015). "Estructura de Capital en mercados emergentes. Velocidad de ajuste de la estructura de capital de empresas peruanas cotizadas en bolsa". Tesis Doctoral.

ventas por huida de clientes hacia competidores (por ende menores flujos de caja generados), etc.

8. Costo de Agencia¹¹

Costos de agencia se refiere a los costos del conflicto de intereses entre los accionistas y los administradores. Estos costos pueden ser directos o indirectos. Un costo indirecto es una oportunidad perdida en la cual una administración no realiza la inversión por temor a perder sus empleos si las cosas no resultan positivas y los accionistas pierden la oportunidad de aumentar el valor de sus acciones. Los costos directos se presentan de dos formas. El primer tipo es un gasto corporativo que beneficia a la administración, pero que tiene un costo para los accionistas. El segundo tipo de costo es un gasto que surge de la necesidad de supervisar las acciones de los administradores.

9. Método del Valor Presente Ajustado (APV)¹²

Considera que el valor de un proyecto para una empresa apalancada (VPA) es igual al valor del proyecto para una empresa no apalancada (VPN) más el valor presente neto de los efectos secundarios del financiamiento (VPNF), los cuales son:

- El subsidio fiscal de la deuda.
- Los costos de emitir nuevos valores.
- Los costos de las dificultades financieras.
- Subsidios al financiamiento con deuda.

Para obtener el valor presente ajustado, se debe calcular los flujos no apalancados y descontarlos a una tasa de descuento de una empresa sin

¹¹ Basado en Cornejo Díaz René Helbert (2015). “Estructura de Capital en mercados emergentes. Velocidad de ajuste de la estructura de capital de empresas peruanas cotizadas en bolsa”. Tesis Doctoral.

¹² Basado en Ross, Westerfield, Jaffe en “Finanzas Corporativas 9º Edición” (2012).

apalancamiento (R_0). Este método se basa en el nivel de deuda en cada periodo futuro, por tanto se debe usar cuando el nivel de deuda se puede especificar de manera precisa para periodos futuros.

10. Método del Flujo a Capital (FTE)¹³

Este método requiere descontar el flujo de efectivo de un proyecto para los accionistas de una empresa apalancada al costo del capital accionario (R_S). El R_S se estima a través del método CAPM o de la proposición II de Modigliani y Miller, y debe ser mayor a R_0 . Para el uso de este método es necesario que se establezca una razón deuda a capital meta.

11. Método del Costo Promedio Ponderado de Capital (WACC)¹⁴

El supuesto de este método es que los proyectos de las empresas apalancadas se financian simultáneamente con deuda y con acciones, por tanto el WACC es un promedio ponderado del costo de la deuda ($(1 - T_C) \times R_B$) y del costo de las acciones (R_S). La ponderación se realiza con razones fijadas como meta que se expresan en términos de valores de mercado, no de valores contables. Esta tasa se utiliza para descontar el flujo de efectivo no apalancado del proyecto, y para determinar el valor presente neto se le resta la inversión inicial.

2.2. Aplicación de los criterios de las derivadas al R_{WACC}

2.2.1. *Propiedades de las derivadas*

Como forma de facilitar la comprensión de los procesos de cálculo que se mostrarán en las secciones siguientes, conviene mencionar inicialmente algunas propiedades y criterios importantes sobre derivadas.

¹³ Basado en Ross, Westerfield, Jaffe en "Finanzas Corporativas 9° Edición" (2012).

¹⁴ Basado en Ross, Westerfield, Jaffe en "Finanzas Corporativas 9° Edición" (2012).

Derivada de una función general:

$$[f^m(x)]' = m \times f^{m-1}(x) \times [f(x)]'. \quad (1)$$

Derivada de una multiplicación de funciones:

$$[f(x) \times g(x)]' = [f(x)]' \times g(x) + f(x) \times [g(x)]'. \quad (2)$$

2.2.2. Aplicación del criterio de la primera derivada

El criterio de la primera derivada establece que, de existir un valor x^* tal que, el valor de la primera derivada de la función evaluada en ese punto sea igual a cero, entonces x^* podría ser un mínimo o máximo relativo. Este concepto queda representado matemáticamente de la siguiente forma:

$$[f(x^*)]' = 0. \quad (3)$$

Ahora, conviene revisar la aplicación de este criterio en la ecuación que se utiliza para el cálculo del Costo Promedio Ponderado de Capital (R_{WACC}). Primero, la expresión del WACC en un mundo con impuestos es:

$$R_{WACC} = \frac{S}{B+S} \times R_s + \frac{B}{B+S} \times R_B \times (1 - T_x), \quad (4)$$

donde T_x es la tasa impositiva.

Luego, se establecen los siguientes cambios de variables:

$$\emptyset = \frac{B}{S}, \quad (5)$$

$$k = 1 - T_x. \quad (6)$$

Además, se considerará que el costo de la deuda (R_B) está en función del apalancamiento ($R_B(\emptyset)$). También se establecerá, que a mayor apalancamiento el costo

de deuda es mayor. Esto producto del efecto de los costos de quiebra (u otros) asociados a un mayor nivel de deuda. Por ende, en general debe cumplirse que:

$$R_B(\emptyset) > 0 \text{ y } R'_B(\emptyset) > 0. \quad (7)$$

Si se reemplaza (5) y (6) en (4) se tiene la siguiente expresión para el WACC:

$$R_{WACC}(\emptyset) = \frac{1}{1+\emptyset} \times R_S(\emptyset) + \frac{\emptyset}{1+\emptyset} \times R_B(\emptyset) \times k. \quad (8)$$

Como se puede apreciar, la ecuación (8) está ahora en función del apalancamiento (\emptyset). Aplicando ahora el criterio de la primera derivada, se tiene que para que exista un $R_{WACC}(\emptyset)$ mínimo o máximo, se debe cumplir que para cierto \emptyset^* , $R'_{WACC}(\emptyset^*) = 0$.

Lo que corresponde ahora, es obtener la derivada de la ecuación (4). Para lograr este objetivo, se debe tener en cuenta las propiedades de la derivada mencionadas en la Sección 2.2.1. De esta forma se tiene:

$$R'_{WACC}(\emptyset) = \left(\frac{1}{1+\emptyset} \times R_S(\emptyset) + \frac{\emptyset}{1+\emptyset} \times R_B(\emptyset) \times k \right) '.$$

Lo cual implica que $R'_{WACC}(\emptyset^*) = 0$ es equivalente a:

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-R_S(\emptyset^*)}{(1+\emptyset^*)^2} + \frac{R'_S(\emptyset^*)}{1+\emptyset^*} + \frac{R_B(\emptyset^*) \times k}{(1+\emptyset^*)^2} + \frac{\emptyset^* \times R'_B(\emptyset^*) \times k}{1+\emptyset^*} = 0. \quad (9)$$

Lo que finalmente equivale a (ver Anexo I):

$$\frac{R_S(\emptyset^*) - k \times R_B(\emptyset^*)}{1+\emptyset^*} = R'_S(\emptyset^*) + R'_B(\emptyset^*) \times k \times \emptyset^*. \quad (10)$$

2.2.3. Aplicación del criterio de la segunda derivada

El criterio de la segunda derivada establece que, de existir un valor x^* tal que, haga que la primera derivada de la función sea igual a cero ($[f(x^*)]' = 0$), y además genere que la segunda derivada de la función en ese punto sea mayor a cero, entonces “ x^* ” es un mínimo relativo. Mientras que, si la segunda derivada resulta negativa, entonces “ x^* ” es un máximo relativo, es decir:

Si $[f(x^*)]'' > 0$, entonces x^* es un mínimo relativo

Si $[f(x^*)]'' < 0$, entonces x^* es un máximo relativo

Luego se aplicará este criterio a la ecuación del R_{WACC} dada en (4). El valor de apalancamiento óptimo debe lograr que $[R_{WACC}(\emptyset^*)]'' > 0$, lo que a su vez implique que $R_{WACC}(\emptyset^*)$ sea el mínimo Costo Promedio Ponderado de Capital.

Continuando con la idea, lo que corresponde ahora es obtener la segunda derivada de (4) (ver Anexo II):

$$\begin{aligned}
 R''_{WACC}(\emptyset) &= \left(\frac{1}{1+\emptyset} \times R_s(\emptyset) + \frac{\emptyset}{1+\emptyset} \times R_B(\emptyset) \times k \right)'' > 0 \\
 (R'_{WACC}(\emptyset))' &= \left(\frac{-R_s(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R'_s(\emptyset)}{1+\emptyset} + \frac{R_B(\emptyset) \times k}{(1+\emptyset)^2} + \frac{\emptyset \times R'_B(\emptyset) \times k}{1+\emptyset} \right)' > 0 \\
 R''_{WACC}(\emptyset) &= \frac{2 \times R_s(\emptyset)}{(1+\emptyset)^3} - \frac{2 \times R'_s(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R''_s(\emptyset)}{1+\emptyset} - \frac{2 \times k \times R_B(\emptyset)}{(1+\emptyset)^3} + \frac{2 \times k \times R'_B(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} \\
 &\quad + \frac{\emptyset \times k \times R''_B(\emptyset)}{1+\emptyset} > 0. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Finalmente, como conclusión de esta sección se puede establecer lo siguiente:
Si se obtiene un \emptyset^* para el cual se cumple que $R'_{WACC}(\emptyset^*) = 0$ y $R''_{WACC}(\emptyset^*) > 0$, entonces \emptyset^* es la estructura óptima de capital para el cual el Costo Promedio Ponderado de Capital (R_{WACC}) es mínimo.

2.3. Existencia de la estructura óptima de capital

A continuación se desarrollarán cuatro casos en los cuales se busca encontrar la estructura óptima de capital utilizando diversas formulaciones y expresiones matemáticas para R_S y R_B .

Es importante mencionar que en todos los desarrollos que se presentarán en adelante se asumirán las siguientes premisas:

- i. $R_S(\emptyset) > R_B(\emptyset)$
- ii. $R_0 > R_V > 0$,
- iii. $R_B(\emptyset = 0) = R_V$.

Las premisas (i) y (ii) indican que el capital al ser riesgoso tiene un rendimiento esperado mayor que el de la deuda, que es menos riesgosa. La premisa (iii) indica que el costo de la deuda, cuando el apalancamiento es cero (cuando no existe deuda), es igual a una tasa R_V . Esta tasa (R_V) representa el interés al cual un acreedor estaría dispuesto a hacer un préstamo a una empresa que no tiene deuda, es decir, que se encuentra totalmente financiado con patrimonio.

Finalmente, para los casos que se mostrarán a continuación, el objetivo es encontrar un valor o expresión de \emptyset^* que permita obtener un R_{WACC} mínimo. Para lograr este propósito se utilizarán las expresiones (9), (10) y (11).

2.3.1. Caso I

Para este caso se tomará la expresión del costo de capital accionario (R_S) que se deriva de la ecuación de Modigliani y Miller, y se expresará en función del apalancamiento (\emptyset). El costo de la deuda también se expresará en función del apalancamiento ($R_B(\emptyset)$), ya que como se mencionó anteriormente, se espera que este costo también aumente conforme aumenta el nivel de deuda de la empresa, reflejando de esta manera los costos de quiebra asociados.

Ambas expresiones, el costo de capital y costo de la deuda, se usarán en la ecuación (10) con el fin de poder obtener el apalancamiento óptimo en función a variables que dependan del apalancamiento (\emptyset).

En la Tabla 2.1 se puede ver las expresiones de ambas tasas (costos) incluyendo la primera y segunda derivada para cada uno.

Tabla 2.1. Primera y segunda derivada de R_S y R_B

Costo del Capital Accionario	Costo de la Deuda
$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_B(\emptyset)) \times k$	$R_B(\emptyset)$
$R'_S(\emptyset) = k \times R_0 - k \times R_B(\emptyset) - R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset$	$R'_B(\emptyset)$
$R''_S(\emptyset) = -k \times R'_B(\emptyset) - R''_B(\emptyset) \times k \times \emptyset - R'_B(\emptyset) \times k$	$R''_B(\emptyset)$

A continuación, se reemplazarán las ecuaciones de la Tabla 2.1 en la ecuación (10) obtenida en la Sección 2.2.2, con el fin de obtener una expresión de \emptyset^* (o en su defecto $R_B(\emptyset)$) que permita calcular el apalancamiento óptimo en función de las otras variables. Se tiene entonces:

$$\frac{R_S(\emptyset) - k \times R_B(\emptyset)}{1 + \emptyset} = R'_S(\emptyset) + R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset \quad (10)$$

Reemplazando y resolviendo, la ecuación (10) con los datos de la Tabla 2.1, se tiene:

$$\frac{[R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_B(\emptyset)) \times k] - k \times R_B(\emptyset)}{1 + \emptyset}$$

$$= [k \times R_0 - k \times R_B(\emptyset) - R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset] + R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset$$

$$\frac{R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_B(\emptyset)) \times k - k \times R_B(\emptyset)}{1 + \emptyset} = k \times R_0 - k \times R_B(\emptyset)$$

$$R_0 + \emptyset \times k \times R_0 - \emptyset \times k \times R_B(\emptyset) - k \times R_B(\emptyset)$$

$$= k \times R_0 - k \times R_B(\emptyset) + \emptyset \times k \times R_0 - \emptyset \times k \times R_B(\emptyset).$$

Despejando la ecuación anterior, queda:

$$R_0 = k \times R_0,$$

$$R_0 = (1 - T_x) \times R_0 ,$$

y lo cual implica que:

$$T_x = 0.$$

Del desarrollo de esta sección se puede concluir que:

- La única forma de encontrar el WACC óptimo es cuando el impuesto es cero.
- En el resultado final se obtiene un valor de impuestos igual a 0%. Esto último implica el cumplimiento de la Proposición I de Modigliani y Miller en un mundo sin impuestos, la cual establece que el valor de la empresa se mantiene igual sin importar el nivel de apalancamiento de la misma, es decir, que el WACC se mantiene constante.
- Las funciones $R_B(\emptyset)$ y $R'_B(\emptyset)$ se eliminan. Es decir, sin importar la forma que tenga $R_B(\emptyset)$ (lineal, exponencial, cuadrática, etc.), la condición de impuestos igual a cero

provocará que el R_{WACC} se mantenga constante sin importar el nivel de apalancamiento (\emptyset).

- Cuando la tasa R_S se calcula en función de R_B (según la expresión original de M&M), y esta última a su vez también se encuentra en función del apalancamiento, no podrán obtenerse las condiciones para la existencia de una estructura óptima de capital. Lo mejor que puede lograrse es la existencia de un WACC constante, lo que a su vez implica que no exista un único apalancamiento óptimo, o que todos los niveles de apalancamiento sean óptimos.

2.3.2. Caso II

Para este y los siguientes casos, se reemplazará $R_B(\emptyset)$ por R_V en la expresión de R_S . Hay que recordar que R_V es igual a R_B cuando no existe deuda ($\emptyset = 0$). Las ecuaciones se detallan en la Tabla 2.2.

Ambas expresiones, el costo de capital y costo de la deuda, se usarán en la ecuación (10) con el fin de poder obtener el apalancamiento óptimo en función a variables que dependan del apalancamiento (\emptyset).

Tabla 2.2. Primera y segunda derivada de R_S y R_B

Costo del Capital Accionario	Costo de la Deuda
$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k$	$R_B(\emptyset)$
$R'_S(\emptyset) = (R_0 - R_V) \times k$	$R'_B(\emptyset)$
$R''_S(\emptyset) = 0$	$R''_B(\emptyset)$

Reemplazando los datos de la Tabla 2.2 en la expresión (10) obtenida en la Sección 2.2.2, se tiene:

$$\frac{R_s(\emptyset) - k \times R_B(\emptyset)}{1 + \emptyset} = R'_s(\emptyset) + R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset. \quad (10)$$

Esta es la fórmula obtenida reemplazando los datos:

$$\frac{[R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k] - k \times R_B(\emptyset)}{1 + \emptyset} = [(R_0 - R_V) \times k] + R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset.$$

Ahora se procede a despejar la fórmula:

$$[R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k] - k \times R_B(\emptyset) = (1 + \emptyset) \times \{ [(R_0 - R_V) \times k] + R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset \}$$

$$R_0 - k \times R_B(\emptyset) = (R_0 - R_V) \times k + R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset \times (1 + \emptyset)$$

$$k \times R_B(\emptyset) = R_0 - (R_0 - R_V) \times k - R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset \times (1 + \emptyset)$$

$$R_B(\emptyset) = R_0/k - (R_0 - R_V) - R'_B(\emptyset) \times \emptyset \times (1 + \emptyset)$$

$$R_B(\emptyset) = R_0 \left(\frac{1}{k} - 1 \right) + R_V - R'_B(\emptyset) \times \emptyset \times (1 + \emptyset). \quad (12)$$

Donde $k = 1 - T_x$, por tanto:

$$R_B(\emptyset) = R_0 \left(\frac{T_x}{1 - T_x} \right) + R_V - R'_B(\emptyset) \times \emptyset \times (1 + \emptyset). \quad (13)$$

En adelante, para facilitar los cálculos futuros se denominará:

$$H = R_0 \left(\frac{1}{k} - 1 \right) + R_V$$

$$\text{Y siendo que } k = 1 - T_x, \text{ entonces } H = R_0 \left(\frac{T_x}{1 - T_x} \right) + R_V. \quad (14)$$

Finalmente de (13) se obtiene,

$$R_B(\emptyset) = H - R'_B(\emptyset) \times \emptyset \times (1 + \emptyset). \quad (15)$$

La ecuación (15) es una ecuación diferencial ordinaria, la cual será resuelta. Para esto, se debe considerar que la derivada de una función puede expresarse como:
 $f(x)' = df(x)/dx$.

Según esto, a partir de (15) (ver Anexo III) se genera la siguiente ecuación:

$$R_B(\emptyset_2) = H - \frac{(1 + \emptyset_2) \times \emptyset_1}{\emptyset_2 \times (1 + \emptyset_1)} (H - R_B(\emptyset_1)). \quad (16)$$

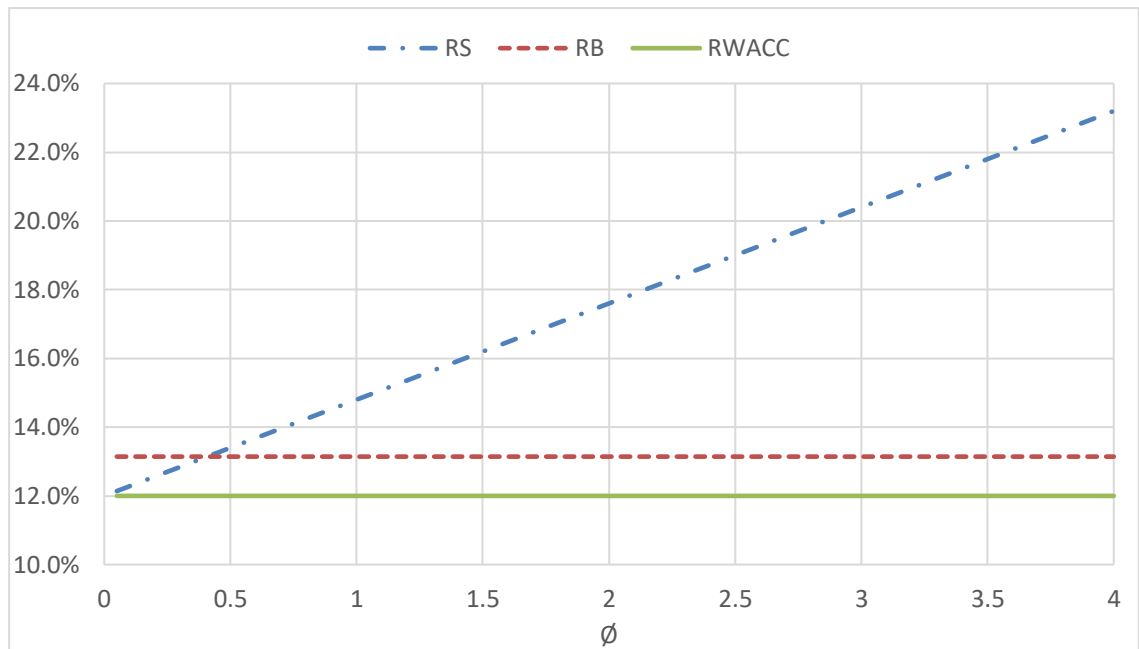
Anteriormente se indicó que R_V es el valor de R_B cuando el apalancamiento es cero. Por lo que se puede tomar la condición de borde donde $\emptyset_1 = 0$ y $R_B(\emptyset_1 = 0) = R_V$. Luego, haciendo $\emptyset_2 = \emptyset^*$ y resolviendo (16) se tiene:

$$R_B(\emptyset) = H = R_0 \left(\frac{T_x}{1 - T_x} \right) + R_V. \quad (17)$$

A manera de ejemplo ilustrativo se presenta la Figura 1, la cual muestra la evolución de R_S (Tabla 2.2), R_B dado por (17) y R_{WACC} dado por (4). Se utilizarán los siguientes valores:

$$R_0 = 12\%, R_V = 8\%, T_x = 30\%$$

Figura 1. Evolución de R_S (Tabla 2.2), R_B (17) y R_{WACC} (4) para diferentes valores de apalancamiento.



De la ecuación (17) y la Figura 1 se pueden extraer las siguientes observaciones:

- La ecuación (17) representa la solución a la ecuación diferencial (15). De hecho, a manera de comprobación, si se obtiene la derivada de la expresión (17) y se reemplaza en (15), como resultado se obtiene la misma ecuación (17).
- El valor de la ecuación (17) es una constante que no depende del apalancamiento.
- Al reemplazar la expresión de R_S (Tabla 2.2) y R_B dada por (17) en $R'_{WACC}(\emptyset)$ y resolver, se obtiene que el numerador es igual a cero (Ver Anexo IV). De hecho, la expresión final obtenida es $R'_{WACC}(\emptyset) = 0/(1 + \emptyset)^2$. Lo cual implica que la ecuación (17) genera un $R'_{WACC}(\emptyset) = 0$ para cualquier nivel de apalancamiento. Esto quiere decir que, sin importar el nivel de apalancamiento, la derivada del R_{WACC} será siempre cero, haciendo mínimos a todos los valores de apalancamiento (\emptyset). Esto indica que R_{WACC} se comporta como una línea horizontal, tal y como se muestra en la Figura 1.
- La ecuación (17) no cumple con el objetivo principal del presente trabajo, el cual busca obtener expresiones matemáticas para R_S y R_B , que a su vez permitan obtener un valor de apalancamiento único para el cual el R_{WACC} sea mínimo. En este caso, las

expresiones obtenidas para ambos casos hacen que todos los valores de apalancamiento sean óptimos.

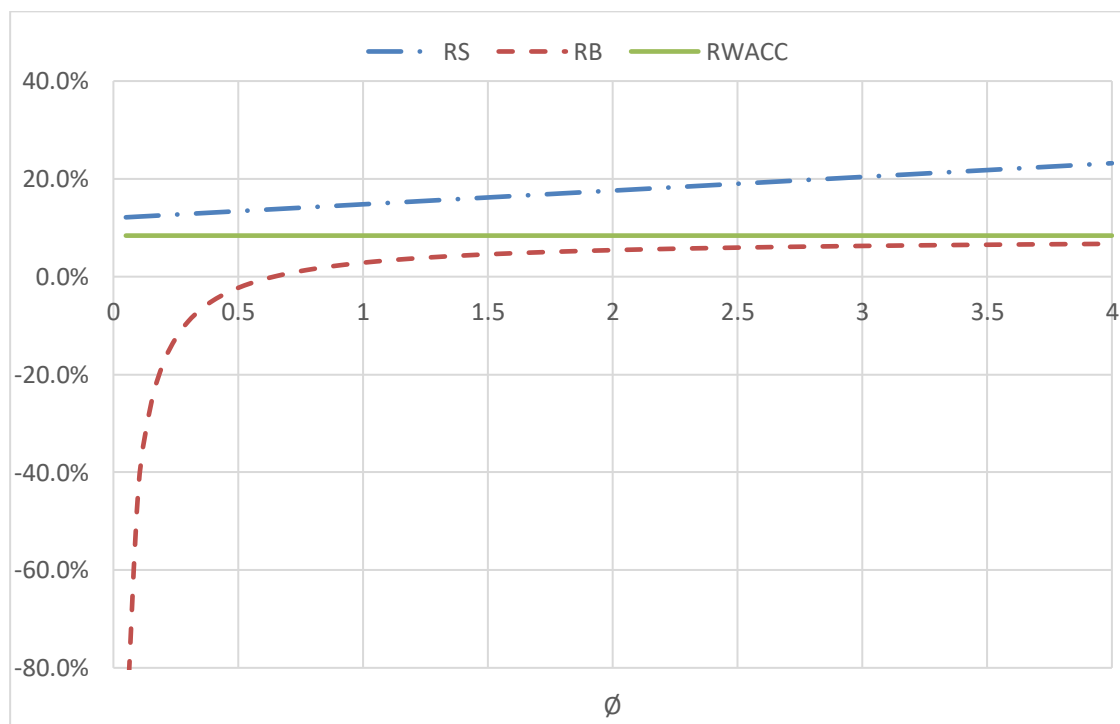
- Si se considera que $R_B(\emptyset = 0) = R_V$, y se reemplaza esta condición en la ecuación (17), se obtiene que $T_x = 100\%$. Es decir, que para que se cumpla esta condición inicial el impuesto debe ser igual al 100%, lo que resulta ilógico e inaplicable en el mundo real y nos regresa a las Proposiciones de Modigliani y Miller sin impuestos.

En el Anexo V se presenta una solución diferente a la ecuación diferencial (15), de donde surge la ecuación (18):

$$R_B(\emptyset) = R_V - \frac{R_0 \times T_x}{\emptyset \times (1 - T_x)}. \quad (18)$$

Similar al caso anterior, a manera de ilustración se presenta la Figura 2 que muestra la evolución de R_S (Tabla 2.2), R_B dado por (18) y R_{WACC} dado por (4). De igual forma se eligieron los mismos valores de $R_0 = 12\%$, $R_V = 8\%$, $T_x = 30\%$.

Figura2. Evolución de R_S (Tabla 2.2), R_B (18) y R_{WACC} (4) para diferentes valores de apalancamiento.



De la expresión (18) y la Figura 2 se pueden obtener las siguientes observaciones:

- La ecuación (18) representa la solución a la ecuación diferencial (15).
- Al reemplazar la expresión de R_S (Tabla 2.2) y R_B dada por (18) en $R'_{WACC}(\emptyset)$ y resolver, se obtiene que el numerador es igual a cero (Ver Anexo VI). De hecho, la expresión final obtenida es $R'_{WACC}(\emptyset) = 0/(1 + \emptyset)^2$. Lo cual implica que la ecuación (18) genera un $R'_{WACC}(\emptyset) = 0$ para cualquier nivel de apalancamiento. Esto quiere decir que, sin importar el nivel de apalancamiento, la derivada del R_{WACC} será siempre cero, haciendo mínimos a todos los valores de apalancamiento (\emptyset). Esto indica que R_{WACC} se comporta como una línea horizontal, tal y como se muestra en la Figura 2.
- Se presenta una singularidad cuando $\emptyset = 0$, el cual hace que para ese punto el valor de R_B sea $-\infty$. Es decir, que a pesar que se limita la ecuación para que cuando el apalancamiento sea cero, el valor de R_B sea igual a R_F , esto no se cumple.

Finalmente se puede concluir que ni la ecuación (17) ni la ecuación (18) cumplen con el objetivo principal del presente trabajo, el cual busca obtener expresiones matemáticas para R_S y R_B que permitan calcular un valor de apalancamiento único para el cual el R_{WACC} sea mínimo y no siempre igual a un valor determinado. En este caso, las expresiones obtenidas para ambos casos hacen que todos los valores de apalancamiento sean mínimos.

2.3.3. Caso III

En los casos anteriores se pudieron determinar algunas características que debe y no debe tener la expresión R_B en función del apalancamiento (\emptyset). Principalmente, se ha indicado que R_B debe aumentar conforme se incrementa el nivel de apalancamiento, y a la vez, debe ser igual a R_V cuando el nivel de deuda sea de cero.

En esta sección y en la siguiente se presentarán dos propuestas de R_B , y se analizará si pueden permitir la obtención de una estructura óptima de capital. En la Tabla 2.3

mostrada a continuación se presenta la primera propuesta de R_B . A la vez, se seguirá manteniendo la forma de R_S definida en la Tabla 2.2. Así se tiene:

Tabla 2.3. Primera y segunda derivada de R_S cuando $R_B = \alpha(1 + \emptyset)^\delta$.

Costo del Capital Accionario	Costo de la Deuda
$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times (1 - T_x)$	$R_B(\emptyset) = \alpha(1 + \emptyset)^\delta$
$R'_S(\emptyset) = (R_0 - R_V) \times (1 - T_x)$	$R'_B(\emptyset) = \alpha\delta(1 + \emptyset)^{\delta-1}$
$R''_S(\emptyset) = 0$	$R''_B(\emptyset) = \alpha\delta(\delta - 1)(1 + \emptyset)^{\delta-2}$

Donde se cumple que α y δ son constantes tales que $\alpha > 0$ y $\delta > 0$.

Reemplazando y resolviendo, la ecuación (10) con los datos de la Tabla 2.3, se tiene:

$$\frac{R_S(\emptyset) - k \times R_B(\emptyset)}{1 + \emptyset} = R'_S(\emptyset) + R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset. \quad (10)$$

$$\frac{R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k - k \times \alpha(1 + \emptyset)^\delta}{1 + \emptyset} = (R_0 - R_V) \times k + \alpha \times \delta \times (1 + \emptyset)^{\delta-1} \times k \times \emptyset$$

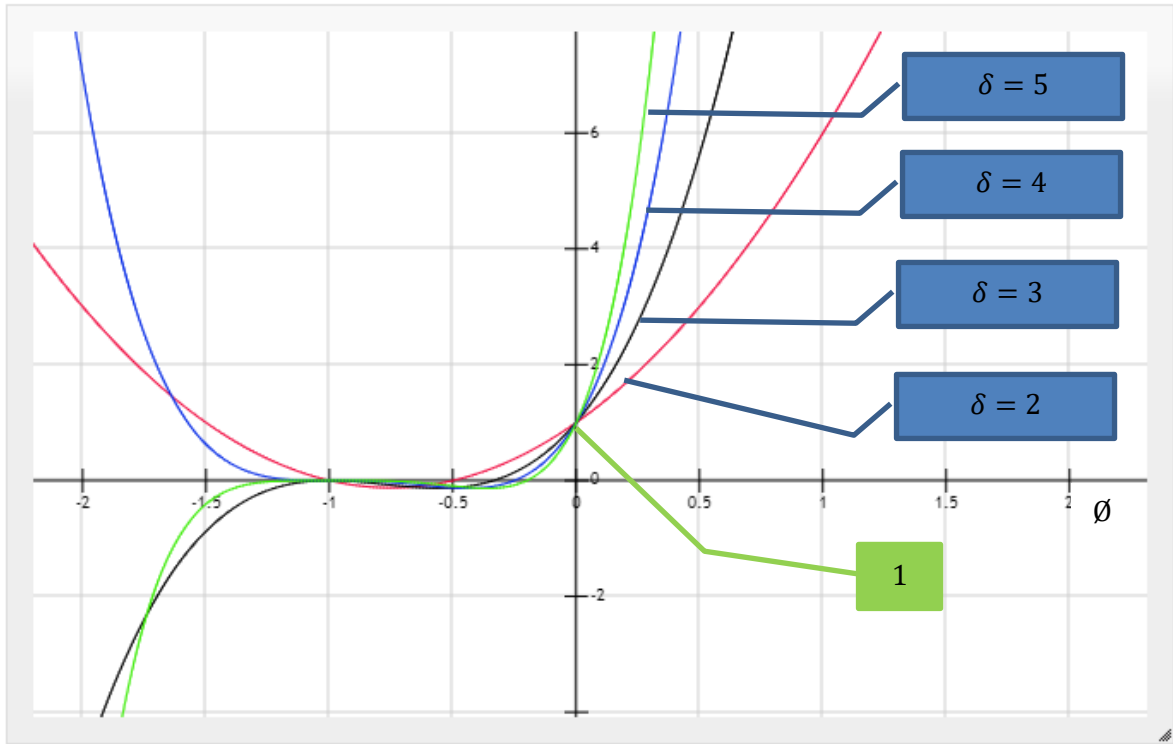
$$R_0 - R_0 \times k + R_V \times k = k \times \alpha \times (1 + \emptyset)^\delta \times (1 + \emptyset \times \delta)$$

$$\frac{R_0 - R_0 \times k + R_V \times k}{k \times \alpha} = (1 + \emptyset)^\delta \times (1 + \emptyset \times \delta)$$

$$\frac{R_0 \times T_x + R_V \times (1 - T_x)}{(1 - T_x) \times \alpha} = (1 + \emptyset)^\delta \times (1 + \emptyset \times \delta). \quad (19)$$

Debido a que la ecuación (19) no permite despejar la variable \emptyset (apalancamiento óptimo) directamente, se procederá en primera instancia a graficar la parte derecha de la expresión (19) para diferentes valores de δ , los cuales se muestran en la Figura 3.

Figura 3: Gráficos de $y = (1 + \emptyset)^\delta \times (1 + \emptyset \times \delta)$ para diferentes valores de δ .



La condición $\alpha > 0$ implica que el lado izquierdo de la ecuación (19) debe ser siempre un número positivo. Además, el presente estudio se enmarca en situaciones con apalancamiento tal que $\emptyset \geq 0$. Según esto, hay que enfocarse en el comportamiento de las gráficas en el cuadrante superior derecho.

Como se puede observar en la Figura 3, todas las curvas, sin importar el valor de δ , se cruzan en el punto 1 del eje vertical “y”. De hecho, esto puede comprobarse fácilmente al reemplazar $\emptyset = 0$ en el lado derecho de (19), obteniéndose como resultado 1 sin importar el valor de δ . Esto nos permite concluir que, para cualquier valor de $\emptyset \geq 0$, se obtendrá $(1 + \emptyset)^\delta \times (1 + \emptyset \delta) \geq 1$ sin importar el valor de δ . Lo anterior se puede aplicar a la ecuación (19), obteniéndose la siguiente condición de existencia del apalancamiento óptimo:

$$\frac{R_0 \times T_x + R_V \times (1 - T_x)}{(1 - T_x) \times \alpha} \geq 1$$

$$\frac{R_0 \times T_x + R_V \times (1 - T_x)}{(1 - T_x)} \geq \alpha. \quad (20)$$

La ecuación (20) limita también el valor de α a un rango determinado que permite la existencia de una estructura óptima de capital. De la misma forma, se puede concluir también que, conociendo los valores de R_0 , R_V y T_x , se puede establecer el rango de α .

Si bien ya se ha determinado un rango al que debe pertenecer α , conviene ahora determinar cuál es su valor. Para esto, se debe considerar que cuando $\emptyset = 0$, la expresión del costo de la deuda se convierte en:

$$R_B(\emptyset = 0) = \alpha(1 + 0)^\delta = \alpha = R_V$$

Es decir, que α representa el costo de la deuda cuando el nivel de apalancamiento es cero. Hay que recordar además, que anteriormente se estableció que “ R_V es aquel costo de la deuda a la cual un acreedor le prestaría dinero a una empresa cuando esta última no tiene deuda (apalancamiento cero)”. Según esto, se podría adicionar esta condición a la ecuación (20) obteniendo:

$$\frac{R_0 \times T_x + R_V \times (1 - T_x)}{(1 - T_x)} \geq R_V. \quad (21)$$

La desigualdad planteada en (21) siempre se cumplirá para cualquier valor de Tasa de impuestos (T_x), siempre y cuando se cumpla que $R_0 > R_V$. El cual es uno de los tres supuestos planteados al inicio de la Sección 2.3.

A partir de este momento se continuará el análisis utilizando cálculos numéricos que permitirán ilustrar mejor el desarrollo que prosigue. Para esto, se considerará los mismos valores utilizados anteriormente:

$$R_0 = 12\%, R_V = 8\%, T_x = 30\%, \delta = 3$$

Así, se puede establecer que, para los valores de tasas e impuesto seleccionados, el valor de $\alpha = R_V = 0.08$ se encuentra dentro del rango de $0.131 \geq \alpha > 0$. Permitiendo a su vez, la existencia un valor de apalancamiento óptimo (\emptyset), que genere un R_{WACC} mínimo.

Conviene ahora verificar si es posible obtener este valor de apalancamiento óptimo con la información que se tiene hasta el momento. Debido a que aún no se ha determinado el valor de δ , se considerará preliminarmente $\delta = 3$, lo que permitirá efectuar los cálculos. Más adelante se analizará δ y su implicancia en la determinación de la estructura óptima de capital. Por ahora, la ecuación del R_{WACC} queda expresada de la siguiente forma:

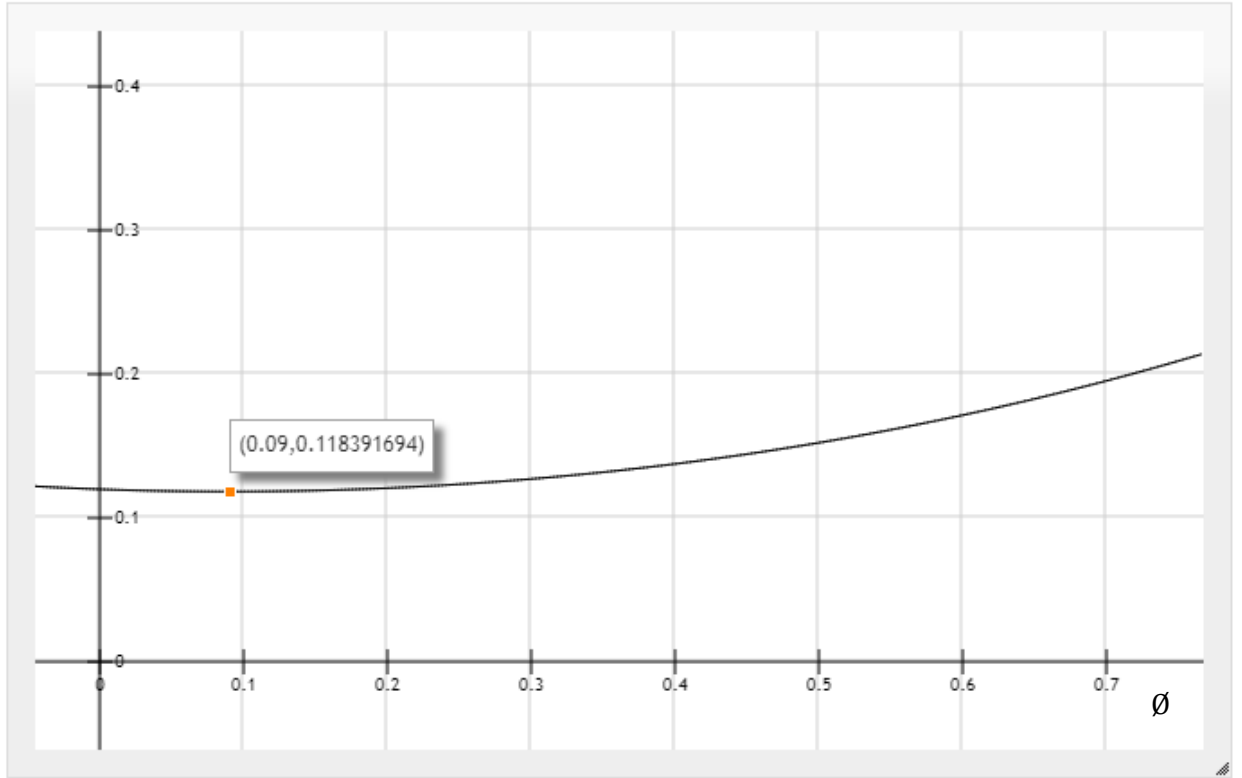
$$R_{WACC}(\emptyset) = \frac{1}{1 + \emptyset} \times R_S(\emptyset) + \frac{\emptyset}{1 + \emptyset} \times R_B(\emptyset) \times k$$

$$R_{WACC}(\emptyset) = \frac{[R_0 + \emptyset(R_0 - R_V) \times (1 - T_x)]}{1 + \emptyset} + \frac{\emptyset}{1 + \emptyset} \times R_V(1 + \emptyset)^\delta \times (1 - T_x). \quad (22)$$

Utilizando los valores mencionados anteriormente y reemplazándolos en (22), se podrá graficar R_{WACC} en función del apalancamiento. Esta gráfica para los valores fijados anteriormente se muestra en la Figura 4. Para esto, se consideran los mismos valores utilizados anteriormente:

$$R_0 = 12\%, \quad R_V = 8\%, \quad T_x = 30\%, \quad \alpha = 0.08, \quad \delta = 3$$

Figura 4: Gráfica de R_{WACC} y su punto mínimo.



De la Figura 4 se puede obtener el punto mínimo, el cual se da para los siguientes valores:

$$\emptyset = 0.09 \text{ y } R_{WACC} = 11.84\%$$

Conviene ahora comprobar el cumplimiento de los criterios de la primera y segunda derivada reemplazando las expresiones de R_S y R_B de la Tabla 2.3 en (9) y (11):

- Primera Derivada:

$$R'_{WACC}(\emptyset) = \frac{T_x(R_V - R_0) - R_V + \alpha(1 + \emptyset)^\delta (1 - T_x)(1 + \emptyset\delta)}{(1 + \emptyset)^2}. \quad (23)$$

$$R'_{WACC}(\emptyset = 0.09) = 0$$

- Segunda Derivada:

$$R''_{WACC}(\emptyset) = 2 \times \frac{[R_0 - (R_0 - R_V)(1 - T_x)]}{(1 + \emptyset)^3} + \frac{\alpha(1 + \emptyset)^\delta(1 - T_x)[-2 + 2\delta + \emptyset\delta(\delta - 1)]}{(1 + \emptyset)^3} > 0. \quad (24)$$

$$R''_{WACC}(\emptyset = 0.09) = 0.396 > 0$$

Como se puede observar, los criterios de la primera y segunda derivada se cumplen, por lo que se demuestra que existe un valor apalancamiento tal que se logra un R_{WACC} mínimo. A su vez, esto queda demostrado también gráficamente a través de la Figura 4.

Por otro lado, para que la solución a la cual se ha llegado tenga sentido, se verifica que:

$$R_S(\emptyset = 0.09) > R_B(\emptyset = 0.09)$$

Siendo:

$$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times (1 - T_x),$$

$$R_B(\emptyset) = \alpha(1 + \emptyset)^\delta$$

Con los datos que se han venido trabajando, se procede a verificar:

$$\begin{aligned} 12\% + 0.09 \times (12\% - 8\%) \times (1 - 30\%) &> 0.08(1 + 0.09)^3 \\ 12.25\% &> 10.36\% \end{aligned}$$

Si bien este ejercicio se ha planteado para unos valores específicos de tasas, sin embargo, estos pueden extrapolarse a cualquier set de valores siempre y cuando se cumplan las siguientes condiciones:

iv. $\alpha = R_V$

v. $\frac{R_0 \times T_x + R_V \times (1 - T_x)}{(1 - T_x)} \geq \alpha$

Ahora que ha quedado definida la variable α , conviene seguir con el análisis para definir la variable δ para la expresión R_B considerada. Para eso, se comenzará analizando la expresión para la segunda derivada (24):

$$R''_{WACC}(\emptyset) = 2 \times \frac{[R_0 - (R_0 - R_V)(1 - T_x)]}{(1 + \emptyset)^3} + \frac{\alpha(1 + \emptyset)^\delta(1 - T_x)[-2 + 2\delta + \emptyset\delta(\delta - 1)]}{(1 + \emptyset)^3} > 0$$

De la expresión anterior se puede observar lo siguiente:

$$2 \times \frac{[R_0 - (R_0 - R_V)(1 - T_x)]}{(1 + \emptyset)^3} > 0 \quad y \quad \frac{\alpha(1 + \emptyset)^\delta(1 - T_x)}{(1 + \emptyset)^3} > 0$$

Por lo tanto $R''_{WACC}(\emptyset) > 0$ siempre que $[-2 + 2\delta + \emptyset\delta(\delta - 1)] > 0$. Para que esto se cumpla, la condición debe ser que $\delta > 1$.

Se establece que si $\delta > 1$, entonces $R''_{WACC}(\emptyset) > 0$.

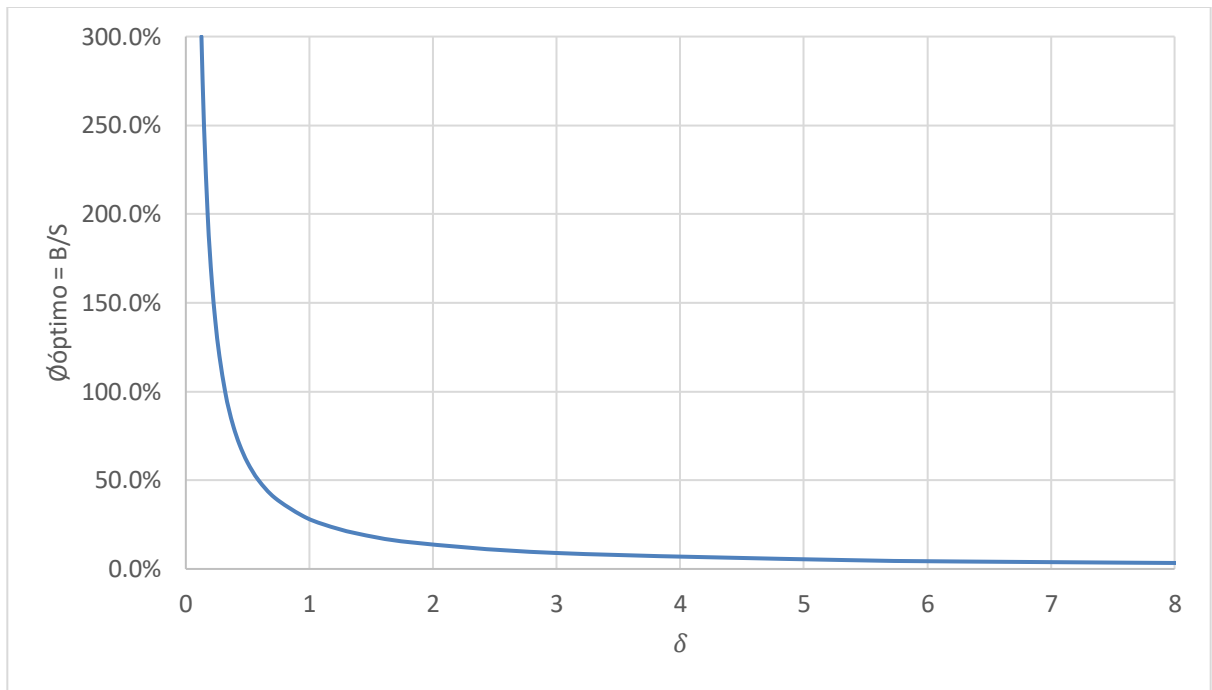
Toca ahora analizar la expresión de la primera derivada. La que puede ser representada bajo la ecuación (19). Además, con lo resuelto hasta el momento, esta se puede reescribir como:

$$\frac{R_0 \times T_x + R_V \times (1 - T_x)}{(1 - T_x) \times R_V} - (1 + \emptyset)^\delta \times (1 + \emptyset \times \delta) = 0. \quad (25)$$

De la expresión anterior, se puede inferir que existe una relación directa entre el valor de apalancamiento óptimo (\emptyset) y δ . Además, para cualquier valor de $\delta > 0$, existirá un valor $\emptyset > 0$ tal que (25) se cumpla.

A manera de ilustración, la Figura 5 muestra esta relación, manteniendo los mismos valores en las otras constantes utilizadas anteriormente ($R_0 = 12\%$, $R_V = 8\%$, $T_x = 30\%$, $\alpha = 0.08$). Donde a partir de $\delta > 1$, hay un apalancamiento (\emptyset) óptimo.

Figura 5: Apalancamiento Óptimo (\emptyset) en función de δ , según ecuación (25).



En la Figura 4 se obtuvo que el valor de la estructura óptima de capital era de $\emptyset = 0.09$ para un $\delta = 3$. Este punto se encuentra contenido en la gráfica de la Figura 5, lo que implica que para cada valor de $\delta > 1$ existe un valor de apalancamiento óptimo (\emptyset).

De lo analizado hasta ahora se puede concluir lo siguiente:

- La ecuación (25) expresa la relación directa que existe entre el apalancamiento óptimo y δ , la cual queda a su vez representada gráficamente en la Figura 5. No obstante, esta gráfica ha sido obtenida para determinados valores de (R_0, R_V, T_X, α) , los cuales pueden variar dependiendo de cada empresa, acreedor o mercado.
- Se ha determinado que $\alpha = R_V$, y que a su vez ésta debe satisfacer la condición (v), que permite la existencia de un valor de apalancamiento óptimo.
- El valor de R_V puede ser obtenido por cada institución financiera (acreedor), utilizando modelos internos para cuantificar la tasa a la que se le prestaría dinero a una empresa libre de deuda.

- La ecuación (25), al mostrarse gráficamente en la Figura 5, permite observar que ambos extremos de la curva tienen tendencias asintóticas. Es decir, tanto \emptyset como δ nunca llegan a ser cero, por lo que no puede existir un apalancamiento óptimo de cero. Esto a su vez implica que para que exista una estructura óptima de capital, debe cumplirse que $\delta > 0$.
- Cuando el apalancamiento es cero, se cumple que $R_B = R_V$, sin importar el valor de δ . En esta situación, la empresa no tiene deuda y está financiada solamente por patrimonio.
- La expresión del costo de capital accionario queda definida por la ecuación $R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times (1 - T_x)$, mientras que el costo de la deuda es $R_B(\emptyset) = R_V \times (1 + \emptyset)^\delta$. Además, la estructura óptima de capital (\emptyset^*) queda definido por la ecuación (22).
- Se verificó que la solución propuesta tiene sentido al demostrar que:
 $R_S(\emptyset = 0.09) > R_B(\emptyset = 0.09)$.

2.3.4. Caso IV

Este caso se resolverá considerando el mismo procedimiento seguido en el Caso III, es decir que se analizará si se puede obtener una estructura óptima de capital. En la Tabla 2.4 mostrada a continuación se presenta la propuesta de R_B . A la vez, se seguirá manteniendo la forma de R_S definida en la Tabla 2.2. Así se tiene:

Tabla 2.4. Primera y segunda derivada de R_S cuando $R_B = \alpha e^{\beta \emptyset}$.

Costo del Capital Accionario	Costo de la Deuda
$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times (1 - T_x)$	$R_B(\emptyset) = \alpha e^{\beta \emptyset}$
$R'_S(\emptyset) = (R_0 - R_V) \times (1 - T_x)$	$R'_B(\emptyset) = \alpha \beta e^{\beta \emptyset}$
$R''_S(\emptyset) = 0$	$R''_B(\emptyset) = \alpha \beta^2 e^{\beta \emptyset}$

Donde se cumple que α y δ son constantes tales que: $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\delta > 0$.

Reemplazando y resolviendo, la ecuación (10) con los datos de la Tabla 2.4, se tiene:

$$\frac{R_s(\emptyset^*) - k \times R_B(\emptyset^*)}{1 + \emptyset^*} = R'_s(\emptyset^*) + R'_B(\emptyset^*) \times k \times \emptyset^*. \quad (10)$$

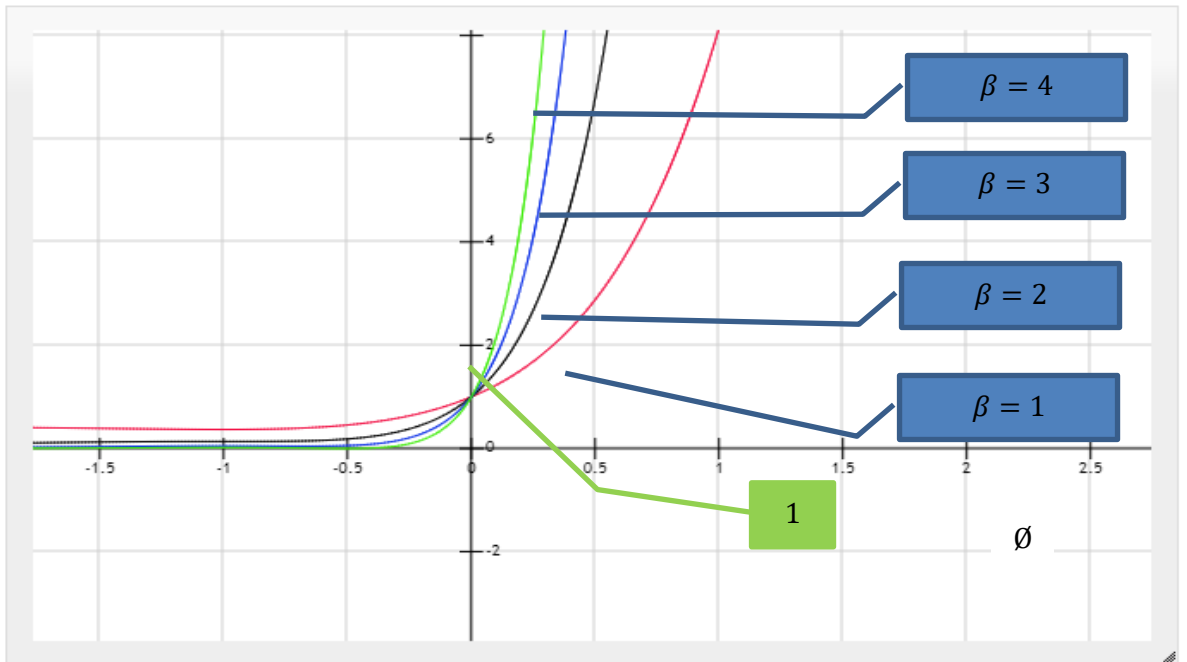
$$\frac{R_0 + \emptyset^* \times (R_0 - R_V) \times k - k \times \alpha \times e^{\beta \emptyset^*}}{1 + \emptyset^*} = (R_0 - R_V) \times k + \alpha \times \beta \times e^{\beta \emptyset^*} \times k \times \emptyset^*$$

$$R_0 - R_0 \times k + R_V \times k = k \times \alpha \times e^{\beta \emptyset^*} (1 + (1 + \emptyset^*) \times \emptyset^* \times \beta)$$

$$\frac{R_0 \times T_x + R_V \times (1 - T_x)}{(1 - T_x) \times \alpha} = e^{\beta \emptyset} (1 + \emptyset^* \times \beta + \emptyset^{*2} \times \beta). \quad (26)$$

Tal y como ocurrió en el Caso III, se observa que (26) no puede ser despejada de una forma que permita calcular el valor del apalancamiento óptimo directamente. Por ende, se procede a graficar la parte derecha de la ecuación (26) para diferentes valores de podría tener β . La Figura 6 muestra los resultados obtenidos.

Figura 6: El eje "y" = $e^{\beta \emptyset} (1 + \emptyset \times \beta + \emptyset^2 \times \beta)$ para diferentes valores de β .



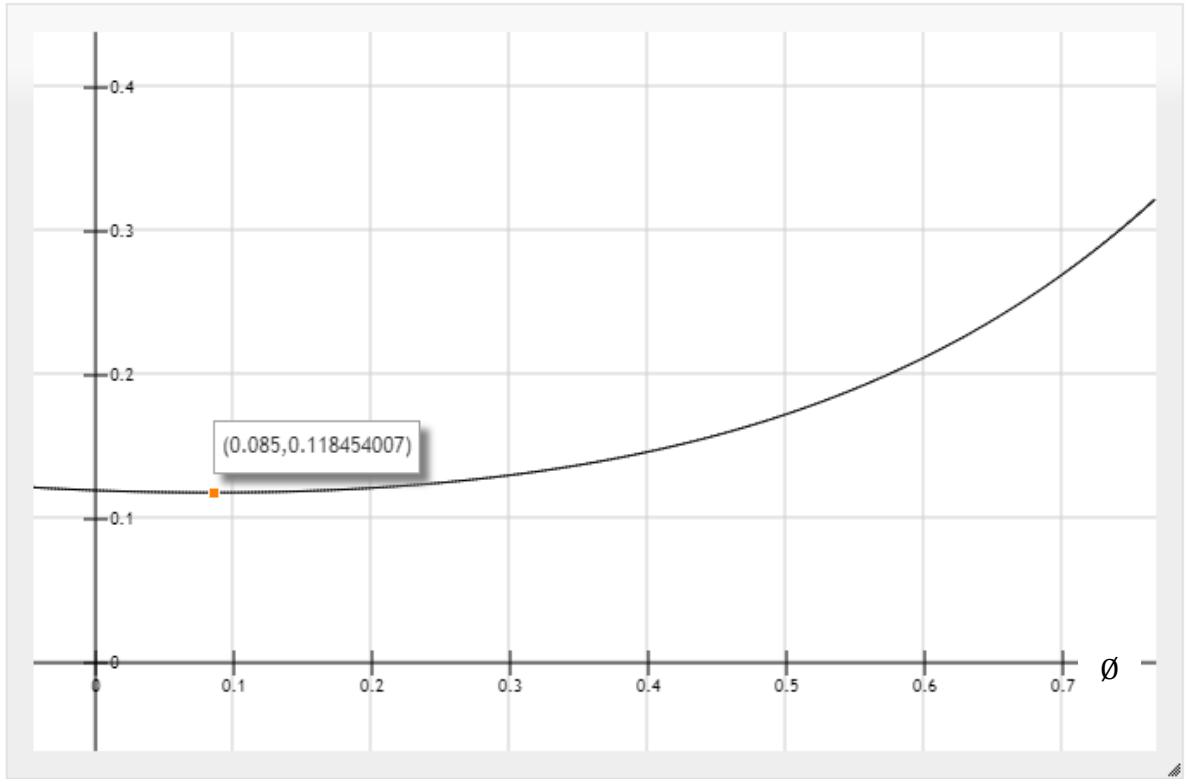
De igual forma que el caso anterior, todas las curvas (sin importar el valor de β) se cruzan en el punto 1 del eje “y”. De hecho, si se continúa el mismo razonamiento y procedimiento que el caso III, se llegará a las mismas expresiones establecidas en las condiciones (iv) y (v). Es claro además que $\alpha = R_V$.

Si se procede a realizar el cálculo numérico utilizando los mismos valores que en el Caso III ($R_0 = 12\%$, $R_V = 8\%$, $T_x = 30\%$, $\alpha = 0.08$), y se define un valor preliminar de $\beta = 3$, se obtendrá la gráfica mostrada en la Figura 7 para la ecuación (27), donde:

$$R_{WACC}(\emptyset) = \frac{1}{1 + \emptyset} \times R_S(\emptyset) + \frac{\emptyset}{1 + \emptyset} \times R_B(\emptyset) \times k$$

$$R_{WACC}(\emptyset) = \frac{[R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times (1 - T_x)]}{1 + \emptyset} + \frac{\emptyset}{1 + \emptyset} \times \alpha e^{\beta \emptyset} \times (1 - T_x). \quad (27)$$

Figura 7: Gráfica de R_{WACC} y su punto mínimo.



$$R_0 = 12\%, R_V = 8\%, T_x = 30\%, \alpha = 0.08, \beta = 3$$

De la gráfica se puede determinar que el punto mínimo se logra para los siguientes valores:

$$\emptyset = 0.085 \text{ y } R_{WACC} = 11.84\%$$

Comprobando con los criterios de la primera y segunda derivada:

- Primera Derivada:

$$R'_{WACC}(\emptyset) = \frac{T_x(R_V - R_0) - R_V + \alpha e^{\beta\emptyset}(1 - T_x)(1 + \emptyset\beta + \emptyset^2\beta)}{(1 + \emptyset)^2} \quad (28)$$

$$R'_{WACC}(\emptyset = 0.085) = 0$$

- Segunda Derivada:

$$R''_{WACC}(\emptyset) = 2 \times \frac{[R_0 - (R_0 - R_V)(1 - T_x)]}{(1 + \emptyset)^3} + \frac{\alpha e^{\beta\emptyset}(1 - T_x)[-2 + 2\beta(1 + \emptyset) + \emptyset\beta^2(1 + \emptyset)^2]}{(1 + \emptyset)^3} > 0. \quad (29)$$

$$R''_{WACC}(\emptyset = 0.085) = 0.419 > 0$$

Como se puede observar, ambos criterios se cumplen. Por lo que los valores de apalancamiento y R_{WACC} representan un punto mínimo, es decir, que \emptyset^* representa la estructura óptima de capital para las condiciones de tasas analizadas. Adicionalmente, se puede verificar que los valores de \emptyset^* de R_{WACC} obtenidos en el Caso III y IV son prácticamente iguales, solo difieren ligeramente en el apalancamiento. De igual forma, también para el Caso IV se pueden utilizar otros valores de tasas mientras se cumplan las condiciones (iv) y (v).

Por otro lado, para que la solución a la cual se ha llegado tenga sentido, se verifica que:

$$R_S(\emptyset = 0.085) > R_B(\emptyset = 0.085)$$

Siendo:

$$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times (1 - T_x),$$

$$R_B(\emptyset) = \alpha e^{\beta \emptyset}$$

Con los datos que se han venido trabajando, se procede a verificar:

$$12\% + 0.085 \times (12\% - 8\%) \times (1 - 30\%) > 0.08(e)^{3(0.085)}$$

$$12.25\% > 10.32\%$$

Conviene determinar ahora el valor de β , para lo cual se analizará la ecuación (29). A partir de esta ecuación se puede determinar que la condición es que $\beta (1 + \emptyset) > 1$, y con eso se garantiza que $R''_{WACC} > 0$.

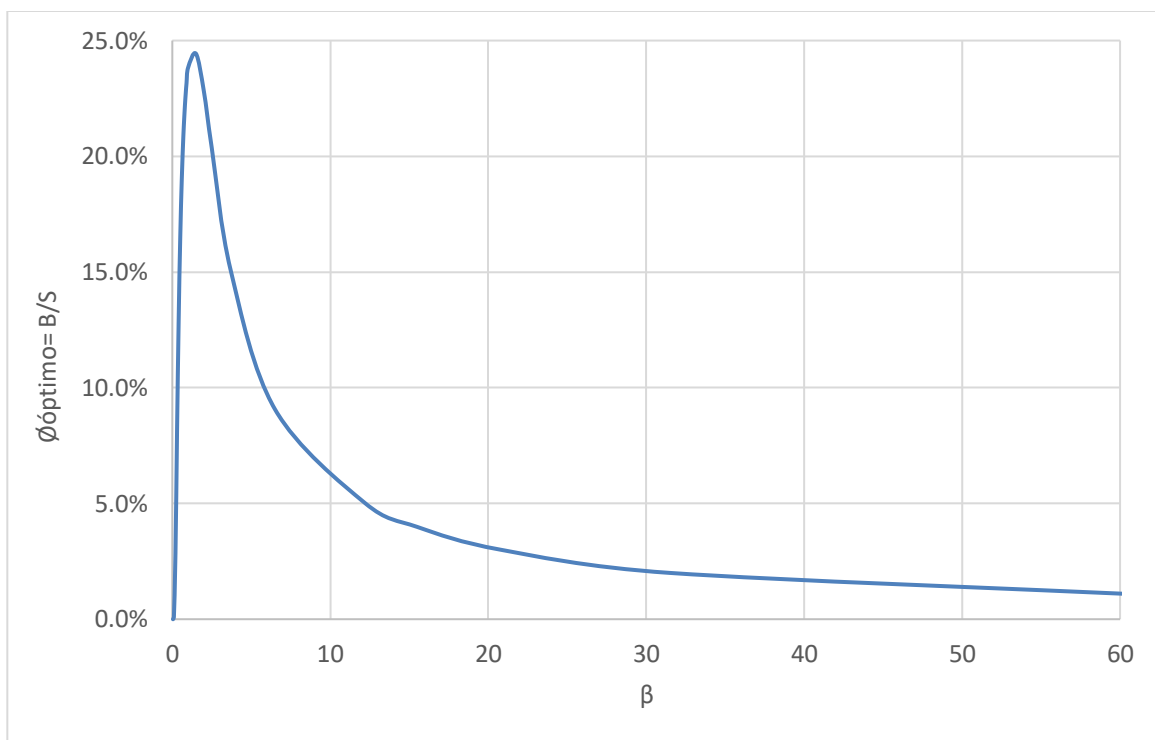
Conviene entonces en estos momentos proceder con la misma lógica establecida en el Caso III, y determinar gráficamente la relación β y \emptyset^* expresada en la ecuación (26). La cual se puede reescribir como:

$$\frac{R_0 \times T_x + R_V \times (1 - T_x)}{(1 - T_x) \times R_V} - e^{\beta \emptyset} (1 + \emptyset^* \times \beta + \emptyset^{*2} \times \beta) = 0. \quad (30)$$

La Figura 6 muestra esta gráfica, en la cual se han mantenido los mismos valores utilizados para las otras variables.

$$R_0 = 12\%, R_V = 8\%, T_x = 30\%, \alpha = 0.08$$

Figura 8: Apalancamiento Óptimo (ϕ^*) en función de β , según ecuación (26).



De lo analizado en esta sección se puede concluir lo siguiente:

- La ecuación (30) expresa la relación directa que existe entre el apalancamiento óptimo y β , la cual queda a su vez representada gráficamente en una instancia de la Figura 8. No obstante, esta gráfica ha sido obtenida para determinados valores de (R_0, R_V, T_x, α) , los cuales pueden variar dependiendo de cada empresa, acreedor o mercado.
- Las condiciones (iv) y (v) establecidas en el Caso III, se asumen también que se cumplen en esta sección.
- Cuando el apalancamiento es cero, se cumple que $R_B = R_V$, sin importar el valor de β . En esta situación, la empresa no tiene deuda y está financiada solamente por patrimonio.
- La ecuación (30), al mostrarse gráficamente en la Figura 8, permite observar que en el extremo derecho la curva se vuelve asintótica conforme β aumenta. Por otro lado, se observa que el valor de apalancamiento óptimo está limitado hasta un valor máximo cercano al 25% (para las variables utilizadas).

- La expresión del costo de capital accionario queda definida por la ecuación $R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times (1 - T_x)$, mientras que el costo de la deuda es $R_B(\emptyset) = \alpha e^{\beta \emptyset}$. Además, la estructura óptima de capital (\emptyset^*) queda definida por la ecuación (30).
- Debido a que esta expresión de R_B limita el rango del apalancamiento óptimo, no podría ser utilizada para aplicaciones reales, donde existen valores de apalancamiento muy amplios.
- Se verificó que la solución propuesta tiene sentido al demostrar que:
 $R_S(\emptyset = 0.085) > R_B(\emptyset = 0.085)$.

De lo analizado en este capítulo, se puede concluir que el Caso III se acerca mucho más al cumplimiento del objetivo principal del trabajo, además de permitir su aplicación al mundo real, ya que:

1. La expresión de R_B definida permite obtener un valor positivo del costo de la deuda cuando el apalancamiento es cero (R_V).
2. Existe, y puede determinarse, la estructura óptima de capital mediante el análisis gráfico o analítico de la ecuación (25).
3. Los márgenes de apalancamiento no están limitados lo cual permite su aplicación al mundo real, donde los niveles del ratio B/S son muy variados y amplios dependiendo de cada industria o empresa.

CAPÍTULO III). REVISIÓN DEL MODELO DE PABLO FERNÁNDEZ

En el capítulo anterior se determinó que el Caso III presenta los modelos más adecuados para el cálculo de R_S y R_B , que a su vez permiten la existencia de una estructura óptima de capital. Adicionalmente, la forma de R_B permite establecer un valor del costo de la deuda cuando el apalancamiento es cero, y no limita el apalancamiento óptimo a un rango determinado (como se observó en el Caso IV). Estas características facilitan la aplicabilidad del modelo al mundo real.

Según lo mencionado en el párrafo anterior, conviene ahora comparar el modelo obtenido en el Caso III con alguna referencia externa con el fin de evaluar las implicancias. En ese sentido, se tomará el estudio hecho por Pablo Fernández¹⁵ a una nota técnica del Harvard Business School¹⁶ referido a la estructura óptima de capital.

3.1. Revisión del estudio de Pablo Fernández

En esta sección se mencionarán y resumirán algunas observaciones que se han encontrado en la nota técnica del Harvard Business School analizada en su estudio.

1. Cumplimiento de los principios de mercados eficientes.
2. Flujos Perpetuos (no se considera finitos)
3. Valor contable de la deuda = valor de mercado de la deuda
4. Valor contable de B+S constante.
5. El nivel de apalancamiento indicado se logra pasando desde un nivel inicial de deuda igual a cero, y no escalonadamente.
6. La emisión de deuda sirve sólo para recomprar acciones.
7. No hay crecimiento de la empresa.
8. No hay reinversión de utilidades. Todo se paga en dividendos.
9. La amortización anual es igual a las inversiones.
10. Existe circularidad entre el R_B y el valor de mercado de la deuda.
11. Uso de R_B como tasa de descuento para el escudo fiscal.
12. El máximo valor de la empresa se logra con el mínimo valor del Costo Promedio Ponderado de Capital (WACC). La estructura óptima de capital es aquella que minimiza el WACC.
13. El WACC mínimo maximiza el precio de las acciones cuando la rentabilidad exigida a la deuda es igual al costo de la deuda.

¹⁵ Fernandez Pablo (2002). Optimal Capital Structure: Problems with the Harvard and Damodaran approaches. Research Paper N°454.

¹⁶«Note on the Theory of Optimal Capital Structure», que aparece en el libro Case Problems in Finance, de Fruham y otros (1992). Irwin, 1era edición

14. Los valores de R_B y R_S son arbitrarios, no siguen ninguna expresión matemática o relación conocida, ni tampoco se explica en el documento como se obtuvieron.
15. La tasa de impuesto es 50%.

De las observaciones mencionadas, se debe hacer hincapié en la número (12) y (13), ya que el presente trabajo se desarrolla manteniendo esas condiciones. En el caso de la número (12), porque concuerda exactamente con la definición de estructura óptima que se ha planteado desde un inicio. Y en el caso de la número (13), porque si no se mantiene esta condición, el estudio se vuelve más extenso, superando el alcance del presente trabajo.

Por otro lado, de todas las observaciones mencionadas, se pueden aceptar y estar de acuerdo con todas a excepción de las dos últimas. Estas son condiciones que, como se menciona, no se explican cómo se obtuvieron. Por ejemplo, ¿Los valores del costo de capital accionario (R_S) se obtuvieron del modelo del CAPM o de M&M?, los valores del costo de la deuda (R_B) ¿Cómo se generaron y qué relación siguen? La tasa de impuestos está colocada en 50%, sin embargo, cuando esta se modifica a otro valor ¿se mantiene la existencia de un WACC mínimo? Son precisamente estas dudas las que se pretenden abordar en el presente trabajo de tesis. En este documento lo que se busca es encontrar relaciones matemáticas que describan la evolución y comportamiento de R_S y R_B y que a su vez permitan obtener el valor de WACC mínimo que se busca.

3.2. Comparación de resultados.

En esta Sección se utilizará la Tabla 27.1 (Anexo VII) mostrada en el documento de Fernández y se procederá a sustituir los valores de R_S y R_B (manteniendo el resto de valores y condiciones iguales) por las expresiones matemáticas encontradas en el Caso III utilizando una tasa de impuesto distinta de 30%. Finalmente se compararán los resultados con los obtenidos de forma analítica en la Sección 2.3.3.

El Caso I no se desarrollará, ya que como se demostró, sea cual sea la función o valores de R_B , la tasa de impuesto debe ser 0% provocando que el WACC se mantenga constante. Por otro lado, el Caso II tampoco se desarrollará ya que se concluyó que las expresiones propuestas generan resultados ilógicos no interesantes desde el punto de vista económico. Mientras que para el Caso IV, el nivel de apalancamiento se encuentra limitado por lo que tampoco será comparado.

A continuación se presentan nuevamente las ecuaciones obtenidas en el Caso III:

Tabla 3.1. R_S cuando $R_B = \alpha(1 + \emptyset)^\delta$.

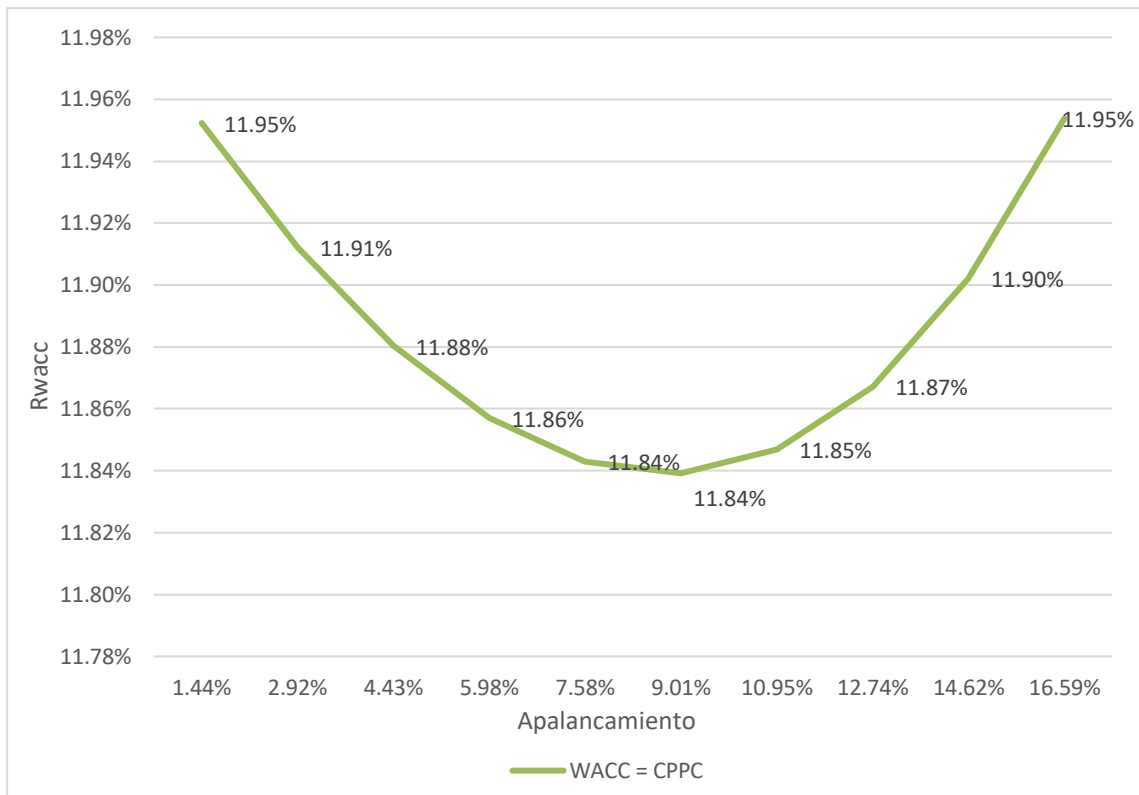
Costo del Capital Accionario	Costo de la Deuda
$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times (1 - T_x)$	$R_B(\emptyset) = \alpha(1 + \emptyset)^\delta$

Como se recuerda, previamente se realizó un ejemplo de cálculo para comprobar si con estas ecuaciones se podría obtener un punto de estructura óptima de capital. Este resultado se muestra en la Figura 4.

Lo que continúa ahora, es verificar si al reemplazar las fórmulas mostradas en la Tabla 3.1 se puede obtener una estructura óptima de capital. Para esto, se tomarán los mismos datos y consideraciones mencionados en la sección anterior a excepción de los puntos (14) y (15). Es decir:

$$R_0 = 12\%, R_V = 8\%, T_x = 30\%, \alpha = 0.08$$

Figura 9: Resultado Modelo Pablo Fernández.



Para el caso del punto 14, se reemplazan los datos de las líneas 9 y 10 (R_B y R_S) de la Tabla 27.1 del documento de Fernández (Anexo VII) ya que son números que no siguen ninguna relación matemática o expresión financiera conocida, y por ende no se puede justificar el por qué se pusieron esas cifras y no otras. En su lugar se usarán las expresiones mostradas en la Tabla 3.1 ya que ambas expresiones (R_B y R_S), se encuentran en función del apalancamiento, el cual depende del valor de mercado del Patrimonio y la Deuda, y estos últimos a su vez dependen de R_S y R_B respectivamente, generándose de esta forma una circularidad.

Por otro lado, para el punto 15, la tasa de impuesto que se considera en la Tabla 27.1 (Anexo VII) es de 50%. Debido a que se quiere hacer una aplicación cercana a la realidad peruana, se usará una tasa de impuestos de 30%. Por otro lado, si bien una tasa de impuestos corporativos de 50% puede existir, no es lo más común en los países.

Adicionalmente, en la Tabla 27.1 (Anexo VII) se puede observar en la línea 10, que el costo del capital accionario (R_0) es de 12% cuando la empresa no tiene deuda (apalancamiento cero). Esto es lo mismo que decir, que la tasa de rendimiento de los activos, o de la empresa desapalancada es $R_0 = 12\%$, que es la tasa que se ha venido utilizando para los ejemplos anteriores.

Finalmente, para la expresión de R_B se han considerado los mismos valores de $R_V = 8\%$ y $\alpha = 0.08$. Por lo que, de lo mencionado en los párrafos anteriores, se concluye que los principales valores mencionados son los mismos que los que se han venido utilizando para los cálculos a lo largo de este texto. Es decir:

$$R_0 = 12\%, R_V = 8\%, T_x = 30\%, \alpha = 0.08$$

La Figura 9 muestra el resultado obtenido cuando se grafica R_S , R_B y R_{WACC} reemplazando las expresiones y datos indicados en los párrafos anteriores en la Tabla 27.1 (Anexo VII). Como se puede apreciar, el valor de apalancamiento óptimo y R_{WACC} mínimo son los mismos que los obtenidos analíticamente en el caso III.

$$\emptyset^* = 0.09 \text{ y } R_{WACC} = 11.84\% \text{ (Modelo Pablo Fernández)}$$

La Tabla 3.2 muestra los cálculos realizados para la obtención de la Figura 9. Esta Tabla se ha presentado en forma similar a la Tabla 27.1 (Anexo VII) para facilitar las comparaciones.

Tabla 3.2. Cálculos de la estructura óptima de capital utilizando los datos de la Tabla 27.1 del documento de Pablo Fernández.

Inversión total	500,000							
EBIT = BAIT	120,000							
Tx	30%							
Rv	8%							
Condiciones perpetuas								
Endeudamiento		0.0%	8.0%	10.0%	11.7%	14.0%	16.0%	20.0%
Deuda	-	40,000	50,000	58,650	70,000	80,000	90,000	100,000
Capital propio	500,000	460,000	450,000	441,350	430,000	420,000	410,000	400,000
Costo de la deuda = Kd = Rb	8.00%	9.52%	9.96%	10.36%	10.93%	11.46%	12.05%	12.68%
Costo de capital propio = Ke = Rs	12.00%	12.17%	12.21%	12.25%	12.31%	12.36%	12.41%	12.46%
Ro	12%							
Apalancamiento (Ø)		0.00%	5.98%	7.58%	9.01%	10.95%	12.74%	14.62%
1) Endeudamiento		0%	8%	10%	12%	14%	16%	20%
2) EBIT		120,000	120,000	120,000	120,000	120,000	120,000	120,000
3) Intereses		-	-3,810	-4,981	-6,078	-7,649	-9,171	-10,841
4) EBT		120,000	116,190	115,019	113,922	112,351	110,829	109,159
5) Impuesto a la renta		-36,000	-34,857	-34,506	-34,177	-33,705	-33,249	-32,748
6) U Neta		84,000	81,333	80,513	79,745	78,646	77,580	76,411
7) Dividendos = U Neta		84,000	81,333	80,513	79,745	78,646	77,580	76,411
8) Intereses + Dividendos		84,000	85,143	85,494	85,823	86,295	86,751	87,252
9) Costo de la deuda = Kd = Rb		8.00%	9.52%	9.96%	10.36%	10.93%	11.46%	12.05%
10) Costo de capital propio = Ke = Rs		12.00%	12.17%	12.21%	12.25%	12.31%	12.36%	12.41%
Endeudamiento		0%	8%	10%	12%	14%	16%	20%
11) Valor de mercado de la deuda (B)		-	40,000	50,000	58,650	70,000	80,000	90,000
12) Valor de mercado del capital propio (S)		700,000	668,444	659,278	650,859	639,046	627,833	615,761
13) Valor de mercado de la empresa (B+S)		700,000	708,444	709,278	709,509	709,046	707,833	705,761
14) Valor contable de la deuda		-	40,000	50,000	58,650	70,000	80,000	90,000
15) Valor contable del capital propio		500,000	460,000	450,000	441,350	430,000	420,000	410,000
16) Valor contable de la empresa		500,000	500,000	500,000	500,000	500,000	500,000	500,000
Endeudamiento		0%	8%	10%	12%	14%	16%	20%
17) ROA = EBIT(1-Tc)/Valor Cont. empresa		16.80%	16.80%	16.80%	16.80%	16.80%	16.80%	16.80%
18) ROE = U Neta / Patrimonio		16.80%	17.68%	17.89%	18.07%	18.29%	18.47%	18.78%
19) Número de acciones		5,000	4,718	4,648	4,587	4,506	4,435	4,362
20) Precio de la acción		140.00	141.69	141.86	141.90	141.81	141.57	141.15
21) Utilidad por accion = UPA		16.800	17.240	17.324	17.386	17.452	17.493	17.518
22) PER		8.33	8.22	8.19	8.16	8.13	8.09	8.06
23) Ratio de endeudamiento contable		0.0%	8.0%	10.0%	11.7%	14.0%	16.0%	20.0%
24) Ratio de endeudamiento de mercado		0.00%	5.65%	7.05%	8.27%	9.87%	11.30%	14.23%
Endeudamiento		0%	8%	10%	12%	14%	16%	20%
%B=%D		0.00%	5.65%	7.05%	8.27%	9.87%	11.30%	14.23%
%E=%S		100.0%	94.4%	93.0%	91.7%	90.1%	88.7%	85.8%
25) WACC = CPPC		12.00%	11.86%	11.84%	11.84%	11.85%	11.87%	11.95%
26) FC para acreedores y accionistas		84,000	84,000	84,000	84,000	84,000	84,000	84,000
27) Valor de mercado de la empresa		700,000	708,444	709,278	709,509	709,046	707,833	705,761

Como apunte, los datos de la Tabla 27.1 del documento de Fernández son:

- $R_0 = 12\%$; $T_x = 50\%$

- R_S y R_B son datos puestos que no guardan ni una relación matemática o expresión financiera conocida.

De lo avanzado hasta el momento se puede concluir lo siguiente:

- Se puede observar que se obtienen los mismos valores de apalancamiento y R_{WACC} para el caso III. Es decir, si las tasas R_S y R_B siguen las expresiones definidas en la Tabla 3.1 puede obtenerse un punto óptimo de apalancamiento que genere un R_{WACC} mínimo, y por ende, el mayor valor de la empresa. La principal ventaja es que el comportamiento de ambas tasas queda definido por expresiones matemáticas que explican su comportamiento, y puede a su vez, utilizarse para cualquier tasa de impuestos.
- La obtención de resultados iguales permite demostrar que, tanto si se hacen los cálculos de forma iterativa en una hoja Excel, o de forma analítica considerando el apalancamiento como una variable \emptyset , se obtendrán los mismos resultados. Esto facilita tremendamente los cálculos, ya que reduce la obtención de la estructura óptima de capital a la definición de las tasas involucradas ($R_0, R_V = \alpha, T_x$) y principalmente a la definición del exponente de R_B (δ). Inclusive, el modelo analítico contiene y resuelve en sí mismo las circularidades mencionadas anteriormente.
- El límite donde $R_S > R_B$ es con un endeudamiento del 18%, y con un apalancamiento de 14.62%. Con niveles mayores de apalancamiento ya no se cumple la premisa de: $R_S > R_B$.
- El hecho de cambiar la tasa de impuestos así como el delta (δ) asignado podrían generar alguna duda, por lo que ahora se reproducirá el caso utilizando una tasa de impuesto del 50% (como originalmente estaba definida en la Tabla 27.1) y se usará un delta (δ) que asegure que ambas funciones de R_B (Fernández vs Caso III) sean muy parecidas. Con “Solver” se encuentra el delta que minimiza el error cuadrático de ambas funciones y que las hace parecidas.

La Tabla 3.3 muestra los cálculos realizados con las observaciones del párrafo anterior.

Tabla 3.3. Cálculos de la estructura óptima de capital utilizando los datos de la Tabla 27.1 del documento de Pablo Fernández y un delta (δ) que asemeja los R_B de Fernández y el caso III

Inversión total	500,000							
EBIT = BAIT	120,000							
Tx	50%							
Rv	8%							
α	0.08							
δ	0.95749							
Condiciones perpetuas								
Endeudamiento		0.0%	10.0%	20.0%	30.0%	40.0%	50.0%	60.0%
Deuda		-	50,000	100,000	150,000	200,000	250,000	300,000
Capital propio		500,000	450,000	400,000	350,000	300,000	250,000	200,000
Costo de la deuda = Kd = Rb		8.00%	8.81%	9.72%	10.80%	12.15%	14.06%	18.01%
Costo de capital propio = Ke = Rs		12.00%	12.21%	12.45%	12.74%	13.09%	13.60%	14.67%
Ro	12%							
Apalancamiento (Ø)		0.00%	10.56%	22.58%	36.81%	54.73%	80.15%	133.44%
1) Endeudamiento		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%
2) EBIT		120,000	120,000	120,000	120,000	120,000	120,000	120,000
3) Intereses		-	-4,404	-9,722	-16,200	-24,302	-35,139	-54,041
4) EBT		120,000	115,596	110,278	103,800	95,698	84,861	65,959
5) Impuesto a la renta		-60,000	-57,798	-55,139	-51,900	-47,849	-42,430	-32,979
6) U Neta		60,000	57,798	55,139	51,900	47,849	42,430	32,979
7) Dividendos = U Neta		60,000	57,798	55,139	51,900	47,849	42,430	32,979
8) Intereses + Dividendos		60,000	62,202	64,861	68,100	72,151	77,570	87,021
9) Costo de la deuda = Kd = Rb		8.00%	8.81%	9.72%	10.80%	12.15%	14.06%	18.01%
10) Costo de capital propio = Ke = Rs		12.00%	12.21%	12.45%	12.74%	13.09%	13.60%	14.67%
Endeudamiento		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%
11) Valor de mercado de la deuda (B)		-	50,000	100,000	150,000	200,000	250,000	300,000
12) Valor de mercado del capital propio (S)		500,000	473,318	442,825	407,501	365,408	311,919	224,827
13) Valor de mercado de la empresa (B+S)		500,000	523,318	542,825	557,501	565,408	561,919	524,827
14) Valor contable de la deuda		-	50,000	100,000	150,000	200,000	250,000	300,000
15) Valor contable del capital propio		500,000	450,000	400,000	350,000	300,000	250,000	200,000
16) Valor contable de la empresa		500,000	500,000	500,000	500,000	500,000	500,000	500,000
Endeudamiento		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%
17) ROA = EBIT(1-Tc)/Valor Cont. empresa		12.00%	12.00%	12.00%	12.00%	12.00%	12.00%	12.00%
18) ROE = U Neta / Patrimonio		12.00%	12.84%	13.78%	14.83%	15.95%	16.97%	16.49%
19) Número de acciones		5,000	4,522	4,079	3,655	3,231	2,775	2,142
20) Precio de la acción		100.00	104.66	108.56	111.50	113.08	112.38	104.97
21) Utilidad por accion = UPA		12.000	12.781	13.518	14.201	14.808	15.288	15.397
22) PER		8.33	8.19	8.03	7.85	7.64	7.35	6.82
23) Ratio de endeudamiento contable		0.0%	10.0%	20.0%	30.0%	40.0%	50.0%	60.0%
24) Ratio de endeudamiento de mercado		0.00%	9.55%	18.42%	26.91%	35.37%	44.49%	57.16%
Endeudamiento		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%
% B=% D		0.00%	9.55%	18.42%	26.91%	35.37%	44.49%	57.16%
% E=% S		100.0%	90.4%	81.6%	73.1%	64.6%	55.5%	42.8%
25) WACC = CPPC		12.00%	11.47%	11.05%	10.76%	10.61%	10.68%	11.43%
26) FC para acreedores y accionistas		60,000	60,000	60,000	60,000	60,000	60,000	60,000
27) Valor de mercado de la empresa		500,000	523,318	542,825	557,501	565,408	561,919	524,827

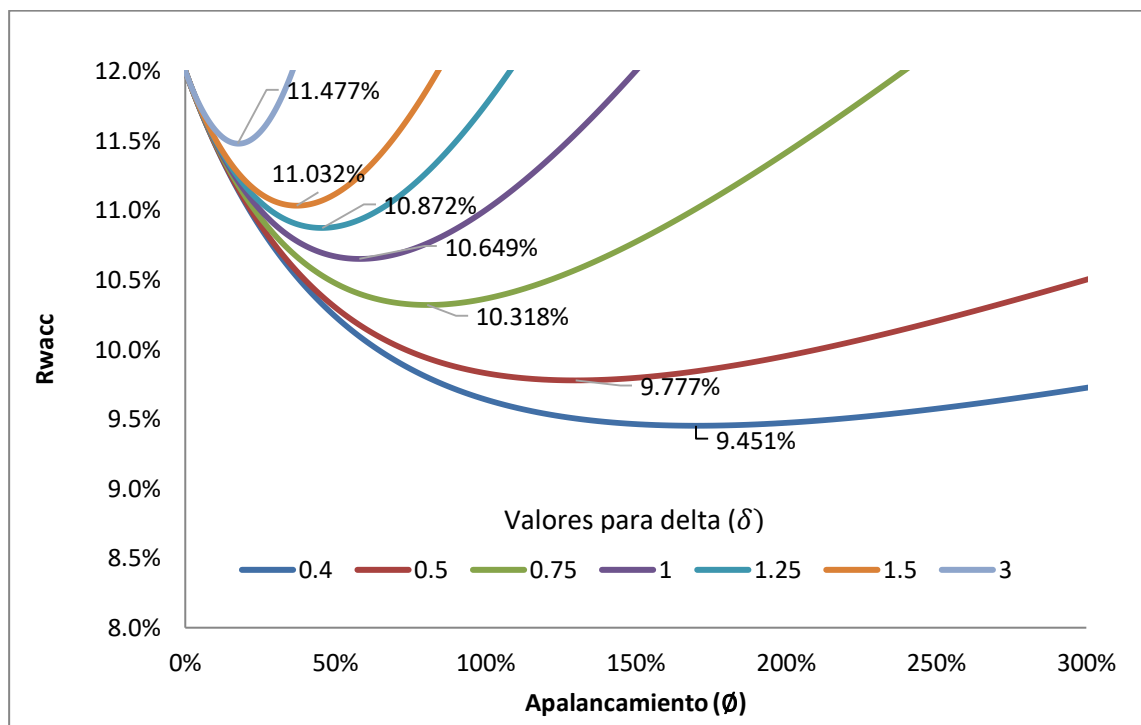
Con la Tabla 3.3 se determina lo siguiente:

- Se obtiene un punto óptimo de apalancamiento que genera un R_{WACC} mínimo, y por ende, el mayor valor de la empresa. El comportamiento de R_S y R_B queda definido por expresiones matemáticas que explican su comportamiento, se iguala la tasa de impuestos ($T_X = 50\%$) y se emplea un delta (δ) que asegura que el R_B es muy parecido al usado por Fernández.
- El límite donde $R_S > R_B$ es con un endeudamiento del 40%, y con un apalancamiento de 54.73%. Con niveles mayores de apalancamiento ya no se cumple la premisa de: $R_S > R_B$.

En la fórmula del costo de la deuda mostrada en la Tabla 3.1 se ha identificado que la variable $\alpha=R_V=0.08$; sin embargo, lo que no ha quedado establecido es a cuánto debe ser igual el valor de delta (δ). Es por ello que se ha evaluado, usando los mismos datos de Fernández, la sensibilidad del R_{WACC} cuando el delta (δ) toma diferentes valores.

$$R_0 = 12\%, R_V = 8\%, T_x = 50\%, \alpha = 0.08$$

Figura 10: Sensibilización del R_{WACC} respecto a delta (δ) y al nivel de apalancamiento (\emptyset)



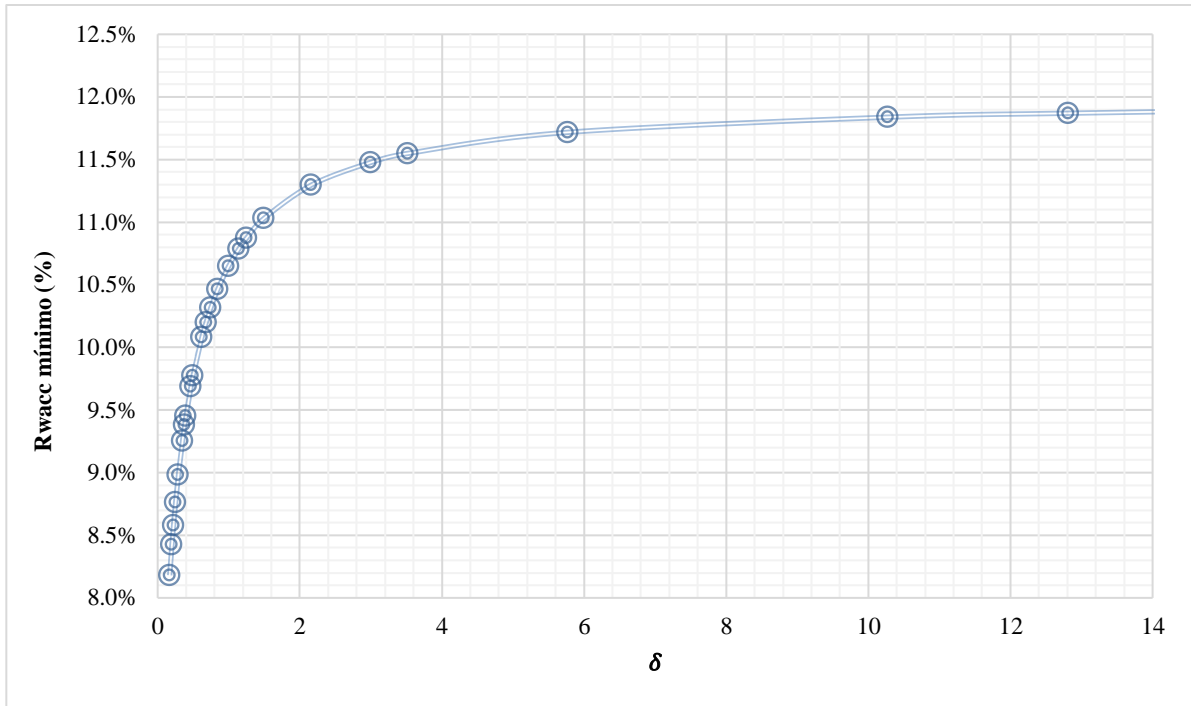
Como se puede apreciar en la Figura 10, a mayor valor para delta (δ), mayor valor para el punto mínimo del R_{WACC} . Por tanto, se puede determinar que el R_{WACC} es muy sensible a la variación del delta (δ), el cual debe expresar y representar características propias de cada mercado, sector económico o industria, con el fin de no distorsionar los resultados que se pueden obtener al usar la expresión matemática del costo de la deuda:

$$R_B(\emptyset) = \alpha(1 + \emptyset)^\delta$$

Lo mencionado en el párrafo anterior se ve representado más claramente en la Figura 11, donde se puede ver que a mayor valor para delta (δ), mayor valor para el R_{WACC} mínimo, generándose una curva asintótica que tiende a 12% (R_0).

$$R_0 = 12\%, R_V = 8\%, T_x = 50\%, \alpha = 0.08$$

Figura 11: Sensibilización del R_{WACC} mínimo respecto a delta (δ).



3.3. Ventajas y Desventajas del modelo

Las ventajas del modelo son:

1. Permite demostrar analíticamente que existe una estructura óptima de capital con la cual se puede maximizar el valor de una empresa. Las tasas R_S y R_B quedan definidas por expresiones matemáticas que explican su comportamiento.
2. La determinación de la estructura óptima de capital se puede lograr sin asumir valores. Todas las variables utilizadas pueden ser obtenidas mediante modelos o formas de cálculo ya existentes. El modelo toma en consideración que la tasa del impuesto, rendimiento de la empresa desapalancada, costo de la deuda en apalancamiento cero, etc., puedan ser variables.
3. Permite definir una expresión en la cual el costo de la deuda está en función al nivel de apalancamiento. Y tiene un valor positivo cuando este es cero.
4. Relaciona de forma directa la estructura óptima de capital con el exponente de costo de la deuda (δ), facilitando y eliminando cálculos e iteraciones que deben realizarse en una hoja Excel.
5. Se aprecia la influencia de los costos de quiebra en el costo promedio ponderado de capital, los cuales son determinantes en la realidad económica ya que influyen en las decisiones y costos de financiamiento.

Las desventajas del modelo son:

1. El estudio está basado en las consideraciones 1 a la 13 mencionadas en la Sección 3.1., las cuales pueden ser limitantes, pero que se pueden levantar e investigar su efecto considerando las ecuaciones ya definidas en la Tabla 3.1.
2. Si bien se ha podido mostrar que las ecuaciones de la Tabla 3.1 permiten obtener un rango amplio para el apalancamiento óptimo, en la Figura 5 se puede observar que su relación es asintótica en los extremos. De hecho, para valores del exponente $\delta < 1$, mínimas variaciones en este, ocasionan altas variaciones en el valor de la estructura óptima. Mientras que para valores de $\delta > 1$, altas variaciones de este valor ocasionan mínimas variaciones en la estructura óptima de capital. No obstante, si se varía las tasas R_0 , R_V y T_X esta curva podría moverse significativamente.

3. La expresión del costo de la deuda tiene dos variables principales: α y δ . Si bien se ha logrado definir que $\alpha = R_V$, no se ha podido definir de forma directa el valor de δ , o algún método para calcularlo. Sin embargo, se ha logrado determinar la relación directa que existe entre esta variable y el apalancamiento óptimo, así como determinar un valor de δ que se asemeje al aplicado por Fernández para efectos del caso comparativo.
4. El desarrollo del presente trabajo ha planteado el cumplimiento de 5 condiciones. Las 3 primeras mencionadas en la Sección 2.3 (i, ii, iii), podrían no necesariamente cumplirse en la realidad, sin embargo, su efecto no ha sido analizado. Por otro lado, las condiciones (iv) y (v) dependen de las mismas variables de las 3 primeras. No obstante, a menos que R_0 o R_V sean negativos, las condiciones (iv) y (v) deberían cumplirse siempre sin importar si las 3 primeras varían (dentro del rango de valores positivos).

CAPÍTULO IV). CONCLUSIONES

- Se ha logrado el objetivo principal del trabajo ya que se encontraron expresiones matemáticas tanto para el costo de capital (R_S) como para el costo de la deuda (R_B) que permiten verificar la existencia de la estructura óptima de capital.
- Se ha logrado determinar las expresiones matemáticas de R_S , y sobretodo de R_B , que permiten que exista un costo promedio ponderado de capital (R_{WAAC}) mínimo, y de esta forma que también exista una estructura óptima de capital. Las expresiones de estas se encuentran definidas en la Tabla 3.1.
- El costo de la deuda propuesto en el Caso III (formulación seleccionada) se incrementa con el aumento del nivel de apalancamiento, y se obtiene un valor positivo fijo cuando el nivel de apalancamiento es cero. Al lograr un punto de inflexión en el R_{WACC} conforme aumenta el nivel de apalancamiento y habiendo asumido que éste es ocasionado por el aumento de los costos de quiebra que se ven reflejados en el costo

de la deuda (R_B), el presente trabajo contribuye a reforzar de forma más analítica y matemática la Teoría del Trade-Off (TOT).

- La elección de las ecuaciones del Caso III (formulación seleccionada para el costo del capital y deuda) se debe básicamente a que estas expresiones no limitan el valor del apalancamiento óptimo a un rango determinado. Esta característica de no limitar el apalancamiento facilita la aplicabilidad del modelo al mundo real.
- Se propone que las variables de R_V y δ , podrían ser obtenidas mediante gráficas generadas con los valores de costo de la deuda (R_B en el eje y) para diversos niveles de apalancamiento (\emptyset en el eje x). Una vez generada y con ayuda de líneas de tendencia y modelos de regresión se pueden obtener los valores de R_V y δ . La data necesaria se encuentra disponible en internet, por lo que resultaría posible armar dicha gráfica. La misma se puede hacer para diversas industrias, mercados, países, etc.
- El presente trabajo se enfoca en asumir perpetuidades para cada nivel de apalancamiento. Sin embargo, no siempre se puede asumir esta condición en valorizaciones reales, básicamente porque los flujos pueden ser finitos, no constantes o porque el nivel de apalancamiento varía en el tiempo por diversas razones. En este sentido, se sugiere complementar el presente trabajo con uno presentado anteriormente que trata estos problemas en el cálculo del WACC: Guevara Rospigliosi Ernesto (2016). *Soluciones al problema del proceso iterativo (circularidad) para determinar el WACC cuando los flujos son finitos y variables*.
- Las tasas definidas de R_S y R_B son rendimientos, ya que se utilizan para calcular valores de mercado. Para el caso de R_S , es una estimación que se logra a través de la expresión original de Modigliani y Miller en un mundo con impuestos combinada con el CAPM. Por otro lado, R_B representa el rendimiento de la deuda, la cual se ha asumido igual al costo de la deuda tal y como se explicó en el punto 13 de la Sección 3.1. Sin embargo, el rendimiento de la deuda puede ser diferente a su costo. Esta condición depende de si analiza el valor de la empresa desde adentro (gerentes, dueños, etc.) o desde afuera (inversores externos, bonistas, mercado de valores, etc.).
- La elección final del Caso III no implica que aquellas expresiones mostradas en el Caso IV no puedan ser utilizadas. De hecho, el lector está en libertad de usar los

modelos de ecuaciones presentados en el Caso III si lo prefiere. La elección de las ecuaciones del Caso III se debe básicamente a que estas expresiones no limitan el valor del apalancamiento óptimo a un rango determinado. Por otro lado, en caso desearan usar las ecuaciones del Caso IV, obtener el apalancamiento óptimo sería un proceso más sencillo, ya que la ecuación exponencial de R_B podría ser aproximada de forma más sencilla en una hoja de Excel usando una línea de tendencia exponencial. Sin embargo, se debe considerar que la función exponencial aumenta con mayor velocidad que una polinómica, esto quiere decir que, conforme aumenta el nivel de apalancamiento, el valor de R_B aumenta más rápidamente para la expresión del Caso IV que la del Caso III cuando $\beta = \delta$, lo cual puede tener implicancias a la hora de determinar tasas de crédito de los bancos u otros acreedores.

ANEXO I

DESARROLLO DE LA PRIMERA DERIVADA DEL R_{WACC} .

Partimos de:

$$R'_{WACC}(\emptyset) = \left(\frac{1}{1+\emptyset} \times R_s(\emptyset) + \frac{\emptyset}{1+\emptyset} \times R_B(\emptyset) \times k \right)'.$$

$$R'_{WACC}(\emptyset) = \left[\left(\frac{1}{1+\emptyset} \right)' \times R_s(\emptyset) + \left(\frac{1}{1+\emptyset} \right) \times R'_s(\emptyset) \right] \\ + \left[\left(\frac{\emptyset}{1+\emptyset} \right)' \times R_B(\emptyset) k + \left(\frac{\emptyset}{1+\emptyset} \right) \times (R_B(\emptyset) k)' \right]$$

Donde la derivada de:

$$\left(\frac{1}{1+\emptyset} \right)' = [(1+\emptyset)^{-1}]' = -1(1+\emptyset)^{-2} = -\frac{1}{(1+\emptyset)^2}$$

Y la derivada de:

$$\left(\frac{\emptyset}{1+\emptyset} \right)' = \left(\emptyset \times \frac{1}{1+\emptyset} \right)' = \emptyset' \times \frac{1}{(1+\emptyset)} + \emptyset \times \left(\frac{1}{1+\emptyset} \right)' = \frac{1}{(1+\emptyset)} - \frac{\emptyset}{(1+\emptyset)^2} = \frac{1}{(1+\emptyset)^2}$$

Por tanto:

$$R'_{WACC}(\emptyset) = -\frac{R_s(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \left(\frac{1}{1+\emptyset} \right) \times R'_s(\emptyset) + \frac{R_B(\emptyset) k}{(1+\emptyset)^2} + \left(\frac{\emptyset}{1+\emptyset} \right) \times R'_B(\emptyset) k = 0$$

$$R'_{WACC}(\emptyset) = \frac{-R_s(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R'_s(\emptyset)}{1+\emptyset} + \frac{R_B(\emptyset) \times k}{(1+\emptyset)^2} + \frac{\emptyset \times R'_B(\emptyset) \times k}{1+\emptyset} = 0. \quad (9)$$

Lo que equivale a:

$$\frac{R_B(\emptyset) \times k}{(1 + \emptyset)^2} - \frac{R_s(\emptyset)}{(1 + \emptyset)^2} + \frac{R'_s(\emptyset)}{1 + \emptyset} + \frac{\emptyset \times R'_B(\emptyset) \times k}{1 + \emptyset} = 0$$

$$\frac{R_B(\emptyset) \times k}{1 + \emptyset} - \frac{R_s(\emptyset)}{1 + \emptyset} + R'_s(\emptyset) + \emptyset \times R'_B(\emptyset) \times k = 0$$

$$\frac{R_s(\emptyset) - k \times R_B(\emptyset)}{1 + \emptyset} = R'_s(\emptyset) + R'_B(\emptyset) \times k \times \emptyset. \quad (10)$$

ANEXO II

DESARROLLO DE LA SEGUNDA DERIVADA DEL R_{WACC} .

Partimos de:

$$(R'_{WACC}(\emptyset))' = \left(\frac{-R_s(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R'_s(\emptyset)}{1+\emptyset} + \frac{R_B(\emptyset) \times k}{(1+\emptyset)^2} + \frac{\emptyset \times R'_B(\emptyset) \times k}{1+\emptyset} \right)' > 0$$

Donde la derivada de:

$$\left(\frac{1}{(1+\emptyset)^2} \right)' = [(1+\emptyset)^{-2}]' = -2(1+\emptyset)^{-3} = -\frac{2}{(1+\emptyset)^3}$$

$$\left(\frac{1}{(1+\emptyset)} \right)' = [(1+\emptyset)^{-1}]' = -1(1+\emptyset)^{-2} = -\frac{1}{(1+\emptyset)^2}$$

Y la derivada de:

$$\left(\frac{\emptyset}{1+\emptyset} \right)' = \left(\emptyset \times \frac{1}{1+\emptyset} \right)' = \emptyset' \times \frac{1}{(1+\emptyset)} + \emptyset \times \left(\frac{1}{1+\emptyset} \right)' = \frac{1}{(1+\emptyset)} - \frac{\emptyset}{(1+\emptyset)^2} = \frac{1}{(1+\emptyset)^2}$$

Por tanto:

$$R''_{WACC}(\emptyset) = \frac{2 \times R_s(\emptyset)}{(1+\emptyset)^3} - \frac{2 \times R'_s(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R''_s(\emptyset)}{1+\emptyset} - \frac{2 \times k \times R_B(\emptyset)}{(1+\emptyset)^3} + \frac{2 \times k \times R'_B(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \frac{\emptyset \times k \times R''_B(\emptyset)}{1+\emptyset} > 0. \quad (11)$$

ANEXO III

ECUACIÓN RESULTANTE (16) DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA (15).

De la ecuación diferencial ordinaria se genera lo siguiente:

$$R_B(\emptyset) = H - R'_B(\emptyset) \times \emptyset \times (1 + \emptyset). \quad (15)$$

$$R_B(\emptyset) = H - \frac{d(R_B(\emptyset))}{d\emptyset} \times \emptyset \times (1 + \emptyset)$$

$$\frac{d(R_B(\emptyset))}{H - R_B(\emptyset)} = \frac{d\emptyset}{\emptyset^* \times (1 + \emptyset)}$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior se tiene:

$$\int_{R_B(\emptyset_1)}^{R_B(\emptyset_2)} \frac{1}{H - R_B(\emptyset)} \times d(R_B(\emptyset)) = \int_{\emptyset_1}^{\emptyset_2} \frac{1}{\emptyset \times (1 + \emptyset)} \times d\emptyset$$

$$-\ln(H - R_B(\emptyset))|_{R_B(\emptyset_1)}^{R_B(\emptyset_2)} = \ln\left(\frac{\emptyset}{1 + \emptyset}\right)|_{\emptyset_1}^{\emptyset_2}$$

$$-\ln(H - R_B(\emptyset_2)) + \ln(H - R_B(\emptyset_1)) = \ln\left(\frac{\emptyset_2}{1 + \emptyset_2}\right) - \ln\left(\frac{\emptyset_1}{1 + \emptyset_1}\right)$$

$$\ln\left(\frac{H - R_B(\emptyset_1)}{H - R_B(\emptyset_2)}\right) = \ln\left(\frac{\emptyset_2 \times (1 + \emptyset_1)}{(1 + \emptyset_2) \times \emptyset_1}\right)$$

$$\frac{H - R_B(\emptyset_1)}{H - R_B(\emptyset_2)} = \frac{\emptyset_2 \times (1 + \emptyset_1)}{(1 + \emptyset_2) \times \emptyset_1}$$

$$R_B(\emptyset_2) = H - \frac{(1 + \emptyset_2) \times \emptyset_1}{\emptyset_2 \times (1 + \emptyset_1)} (H - R_B(\emptyset_1)). \quad (16)$$

ANEXO IV

REEMPLAZO DE R_S Y R_B (ECUACIÓN 17) EN LA ECUACIÓN (9) DEL R'_{WACC} .

La expresión de la primera derivada de R_{WACC} es:

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-R_S(\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R'_S(\emptyset)}{1+\emptyset} + \frac{R_B(\emptyset) \times k}{(1+\emptyset)^2} + \frac{\emptyset \times R'_B(\emptyset) \times k}{1+\emptyset} \quad (9)$$

Considerando:

$$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k$$

$$R'_S(\emptyset) = (R_0 - R_V) \times k$$

Además,

$$R_B(\emptyset) = H = R_0 \left(\frac{1}{k} - 1 \right) + R_V = R_0 \left(\frac{T_x}{1 - T_x} \right) + R_V \quad (17)$$

$$R'_B(\emptyset) = 0$$

Reemplazando en (9) se tiene:

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-[R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k]}{(1+\emptyset)^2} + \frac{(R_0 - R_V) \times k}{1+\emptyset} + \frac{[R_0 \left(\frac{1}{k} - 1 \right) + R_V] \times k}{(1+\emptyset)^2}$$

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-[R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k]}{(1+\emptyset)^2} + \frac{(R_0 - R_V) \times k \times (1+\emptyset)}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R_0(1-k) + R_V k}{(1+\emptyset)^2}$$

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-R_0 + R_0 k - R_V k}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R_0(1-k) + R_V k}{(1+\emptyset)^2}$$

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-R_0 + R_0 k - R_V k}{(1+\emptyset)^2} + \frac{R_0 - R_0 k + R_V k}{(1+\emptyset)^2}$$

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{0}{(1+\emptyset)^2} = 0$$

ANEXO V

ECUACIÓN RESULTANTE (18) DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA (15).

A continuación, se presentará otro camino para la solución de la ecuación diferencial (15). Esto con el fin de verificar si es posible obtener otra forma de R_B que no sea constante y que a su vez sea una solución de (15). Para esto, se partirá de la condición $R_B(\emptyset = 0) = R_V$ y se aplicará la expresión logarítmica obtenida previamente:

$$-\ln(H - R_B(\emptyset)) + \ln(H - R_V) = \ln\left(\frac{\emptyset}{1 + \emptyset}\right) - \ln\left(\frac{0}{1 + 0}\right)$$

El segundo término de la derecha resulta indeterminado, por lo que para seguir con el análisis no se tomará en cuenta. De esta forma:

$$\ln\left(\frac{H - R_V}{H - R_B(\emptyset)}\right) = \ln\left(\frac{\emptyset}{1 + \emptyset}\right)$$

$$\frac{H - R_V}{H - R_B(\emptyset)} = \frac{\emptyset}{1 + \emptyset}$$

$$R_B(\emptyset) = R_V - \frac{R_0 \times T_x}{\emptyset \times (1 - T_x)} \quad (18)$$

ANEXO VI

REEMPLAZO DE R_S Y R_B (ECUACIÓN 18) EN LA ECUACIÓN (9) DEL R'_{WACC} .

La expresión de la primera derivada de R_{WACC} es:

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-R_S(\emptyset)}{(1 + \emptyset)^2} + \frac{R'_S(\emptyset)}{1 + \emptyset} + \frac{R_B(\emptyset) \times k}{(1 + \emptyset)^2} + \frac{\emptyset \times R'_B(\emptyset) \times k}{1 + \emptyset} \quad (9)$$

Considerando:

$$R_S(\emptyset) = R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k$$

$$R'_S(\emptyset) = (R_0 - R_V) \times k$$

Además,

$$R_B(\emptyset) = R_V - \frac{R_0 \times T_x}{\emptyset \times (1 - T_x)} = R_V - \frac{R_0 \times (1 - k)}{\emptyset \times k} \quad (18)$$

$$R'_B(\emptyset) = \frac{R_0 \times T_x}{\emptyset^2 \times (1 - T_x)} = \frac{R_0 \times (1 - k)}{\emptyset^2 \times k}$$

Reemplazando en (9) se tiene:

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-[R_0 + \emptyset \times (R_0 - R_V) \times k]}{(1 + \emptyset)^2} + \frac{(R_0 - R_V) \times k}{1 + \emptyset} + \frac{R_B(\emptyset) \times k}{(1 + \emptyset)^2} + \frac{\emptyset \times R'_B(\emptyset) \times k}{1 + \emptyset}$$

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-R_0 + R_0 k - R_V k}{(1 + \emptyset)^2} + \left[\frac{R_V \emptyset k - R_0(1 - k)}{\emptyset \times k} \right] \times \frac{k}{(1 + \emptyset)^2} + \frac{\emptyset \times \left[\frac{R_0 \times (1 - k)}{\emptyset^2 \times k} \right] \times k}{1 + \emptyset}$$

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-R_0 + R_0 k - R_V k}{(1 + \emptyset)^2} + \frac{R_0(1 - k) + R_V k}{(1 + \emptyset)^2}$$

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{-R_0 + R_0k - R_Vk}{(1 + \emptyset)^2} + \frac{R_0 - R_0k + R_Vk}{(1 + \emptyset)^2}$$

$$R'_{WACC}(\emptyset^*) = \frac{0}{(1 + \emptyset)^2} = 0$$

ANEXO VII

TABLA 27.1 ESTRUCTURA ÓPTIMA. TOMADA DEL DOCUMENTO DE PABLO FERNÁNDEZ¹⁷.

1 Endeudamiento (valor contable)	0%	10%	20%	30%	40%	50%
2 BAIT	120.000	120.000	120.000	120.000	120.000	120.000
3 Intereses	0	4.125	8.750	14.625	22.000	31.250
4 Beneficio antes de impuestos (BAT)	120.000	115.875	111.250	105.375	98.000	88.750
5 Impuestos (50%)	60.000	57.938	55.625	52.688	49.000	44.375
6 Beneficio después de impuestos (BFO)	60.000	57.938	55.625	52.688	49.000	44.375
7 Dividendos = CFac	60.000	57.938	55.625	52.688	49.000	44.375
8 Intereses + dividendos (3) + (7)	60.000	62.063	64.375	67.313	71.000	75.625
9 Coste de la deuda: Kd	8,00%	8,25%	8,75%	9,75%	11,00%	12,50%
10 Coste de los recursos propios: Ke	12,00%	12,50%	13,00%	13,50%	14,50%	16,00%
11 Valor de mercado de la deuda D. (3)/(9)	0	50.000	100.000	150.000	200.000	250.000
12 Valor acciones E. (7)/(10)	500.000	463.500	427.885	390.278	337.931	277.344
13 Valor de mercado de la empresa. (11) + (12)	500.000	513.500	527.885	540.278	537.931	527.344
14 Valor contable de la deuda	0	50.000	100.000	150.000	200.000	250.000
15 Valor contable de las acciones	500.000	450.000	400.000	350.000	300.000	250.000
16 Valor contable de la empresa	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000
17 ROA = BAIT(1 - T)/(16)	12,00%	12,00%	12,00%	12,00%	12,00%	12,00%
18 ROE = (6)/(15)	12,00%	12,88%	13,91%	15,05%	16,33%	17,75%
19 Número de acciones en circulación, NA	5.000	4.513	4.053	3.612	3.141	2.630
20 Cotización de la acción, P (12)/(19)	100	102,7	105,5769	108,06	107,5862	105,4688
21 Beneficio por acción, BPA. (6)/(19)	12	12,8375	13,725	14,5875	15,6	16,875
22 PER	8,33	8	7,69	7,41	6,90	6,25
23 Endeudamiento contable (14)/(16)	0%	10%	20%	30%	40%	50%
24 Endeudamiento (mercado) (11)/(13)	0,00%	9,74%	18,94%	27,76%	37,18%	47,41%
25 Coste promedio del capital (WACC)	12,00%	11,68%	11,37%	11,11%	11,15%	11,38%
26 Cash flow disponible FCF = BAIT (1 - T)	60.000	60.000	60.000	60.000	60.000	60.000
27 Valor de mercado de la empresa. (26)/(25)	500.000	513.500	527.885	540.278	537.931	527.344

¹⁷ Fernandez Pablo (2002). Optimal Capital Structure: Problems with the Harvard and Damodaran approaches. Research Paper N°454.

BIBLIOGRAFÍA

- Amat, O. y Puig, X. (2012). *Marco General de las Finanzas Corporativas*. *Revista de Contabilidad y Dirección*. 15 pp. 11-40.
- Baker Malcolm, Wurgler Jeffrey (2002). *Market timing and capital structure*. *The Journal of Finance* Vol. LVII, No 1.
- Bradley Michael, Jarrel Gregg y Kim Han (1983). *On the Existence of an Optimal Capital Structure: Theory and Evidence*. *The Journal of Finance* Vol. 39, No 3.
- Brealey Richard, Myers Stewart y Allen Franklin (2010). *Principios de Finanzas Corporativas (9a ed)*”. Mc Graw Hill. Capítulos 19 y 20.
- Cornejo Díaz René Helbert (2015). *Estructura de Capital en mercados emergentes. Velocidad de ajuste de la estructura de capital de empresas peruanas cotizadas en bolsa*. Tesis Doctoral.
- Fernandez Pablo (2002). *Optimal Capital Structure: Problems with the Harvard and Damodaran approaches*. Research Paper N°454.
- Guevara Rospigliosi Ernesto (2016). *Soluciones al problema del proceso iterativo (circularidad) para determinar el WACC cuando los flujos son finitos y variables*. Sustentación de Tesis.
- Ju Nengjiu, Parrino Robert, Poteshman Allen y Weisbach Michael (2005). *Horses and rabbits? Trade-Off Theory and Optimal Capital Structure*. *Journal of financial and quantitative analysis* Vol. 40, No 2.
- Leland Hayne y Bjerre Klaus (1996). *Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads*. *The Journal of Finance* Vol. 51, No 3.
- Myers Stewart, Shyan-Sunder Lakshmi (1994). *Testing Static Trade-Off against Pecking Order Models of Capital Structure*. Working Paper N°3677.
- Ross, S., Westerfield, R., Jaffe, J. (2012). *Finanzas Corporativas (9a ed)*. Mc Graw Hill. Capítulos 16, 17, 18 y 19.
- Tham Joseph, Vélez-Pareja Ignacio (2012). *Una nota sobre el costo promedio de capital*. Working Paper N°10.